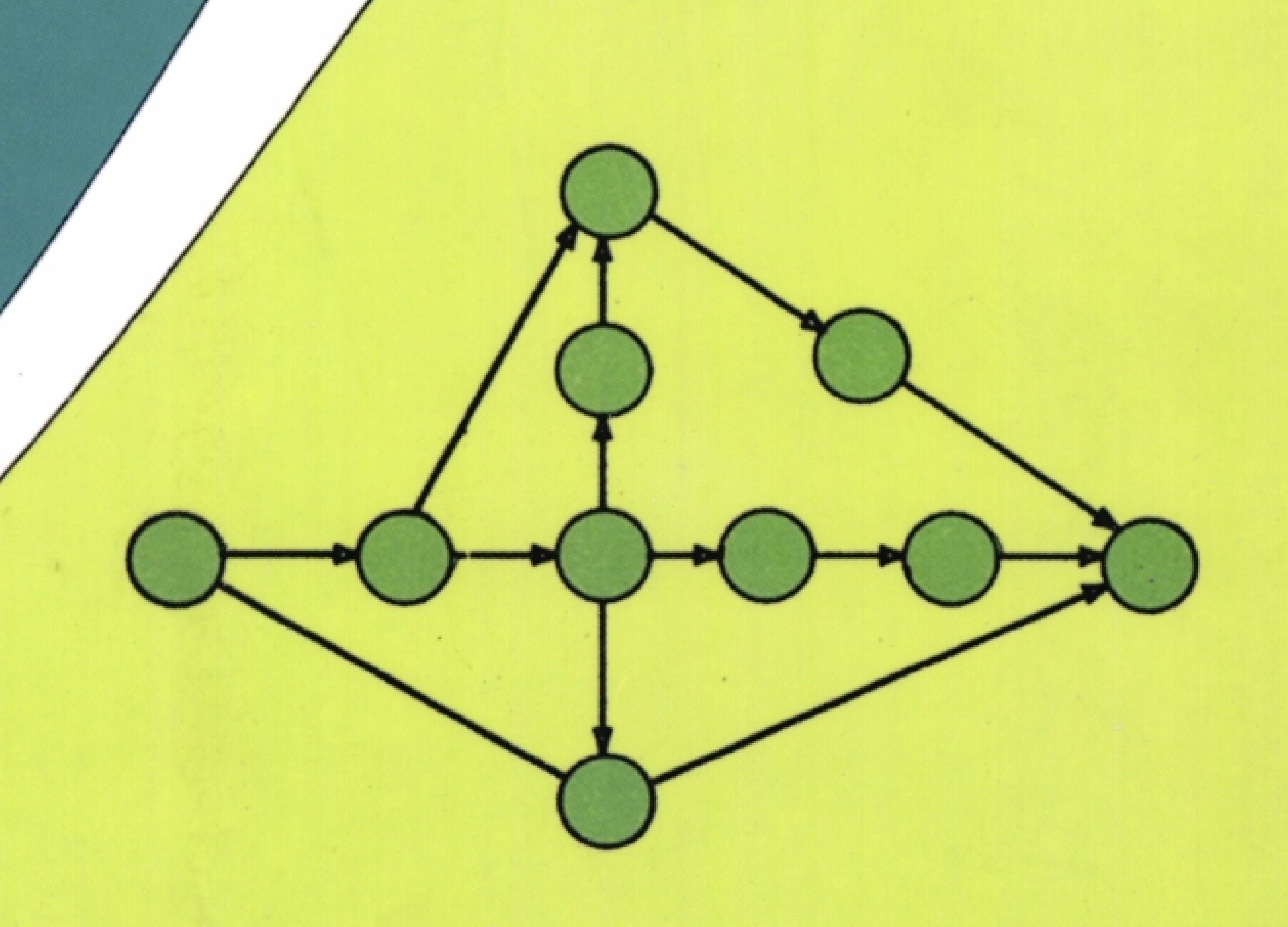




الدكتور إبراهيم أحمد مخلوف



جامعة الملك سعود
النشر العلمي و المطابع



التحليل الكمي في الإدارة

تأليف

الدكتور إبراهيم أحمد مخلوف

أستاذ مشارك - قسم الأساليب الكمية

كلية العلوم الإدارية - جامعة الملك سعود



النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى: ١٤١٥هـ - ١٩٩٥م

الطبعة الثانية: ١٤٢٥هـ - ٢٠٠٤م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

٦٥٨,٤ مخلوف، إبراهيم أحمد.

٤٣٦م التحليل الكمي في الإدارة/ إبراهيم أحمد مخلوف. -. ط١.

الرياض: جامعة الملك سعود، عمادة شؤون المكتبات، ١٤١٤هـ / ١٩٩٤م.

٢٧٠ ص؛ ١٧×٢٤سم

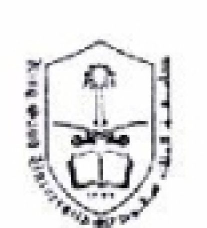
ردمك: ٩-٠٧٦-٠٥-٩٩٦٠ (جلد)

٠-٠٧٥-٠٥-٩٩٦٠ (غلاف)

١. إدارة الأعمال أ. العنوان

رقم الإيداع: ١٤/١٧٢٥

وافق المجلس العلمي بالجامعة على إعادة طباعته في جلسة اجتماعه الخامس عشر للعام الدراسي ١٤٢٤/١٤٢٥هـ المعقود بتاريخ ١٤٢٥/٢/٧هـ الموافق ٢٠٠٤/٣/٢٨م.



النشر العلمي والمطابع ١٤٢٥هـ

المقدمة

برزت في العصر الحديث أهمية أساليب التحليل الكمي في الإدارة وبحوث العمليات كأداة فعالة لاتخاذ القرارات وحل المشكلات التي تواجه الإدارة وذلك نتيجة لكبر حجم المشروعات والمؤسسات الحديثة بحيث أصبحت الأساليب التقليدية التي تعتمد على التجربة والخطأ والخبرة الذاتية لمتخذ القرار غير فعالة، كما أن نتائج القرارات إن لم تكن محسوبة ومقدرة تقديرا صحيحا قد تترتب عليها خسائر لا يمكن تعويضها.

وقد أثبت تطبيق بحوث العمليات نجاحا كبيرا في مجالات كثيرة مثل توزيع الاستثمارات والتخصيص الأمثل للموارد وتحديد مسارات النقل من مناطق الإنتاج إلى مراكز التوزيع وتخطيط وجدولة الأنشطة الخاصة بمشروع معين لتنفيذ ه في أقل وقت ممكن وأيضا في زيادة كفاءة واختبار فعالية النظم المستخدمةفي الإنتاج والتخزين والتسويق وفي غيرها من المجالات.

ويتضمن هذا الكتاب ثلاثة أبواب، نخصص الباب الأول لبيان ماهية التحليل الكمي ومدخل بحوث العمليات لمعالجة مشاكل الإدارة وفكرة بناء النماذج كما نعرض باختصار طبيعة كل أسلوب من الأساليب الرئيسة لبحوث العمليات والمشكلات التي يعالجها. ونقدم في الباب الثاني بعض المفاهيم الأساسية للبرمجة الخطية فنعرض أولا الصياغة الرياضية لبعض المشكلات المهمة مثل مشكلة الإنتاج ومشكلة التغذية والطريقة البيانية لحل البرنامج الخطي ثم طريقة السمبلكس التي تعتبر الطريقة الأساسية لحل المشاكل العملية، ونتناول أيضا مفهوم الثنائية وأسعار

الظل واستخدام ذلك في تفسير الحل الأمثل، كما نعرض موضوع تحليل الحساسية واستخدامه في التعرف على أثر التغير في أحد مؤشرات البرنامج على الحل الأمثل وفي تقويم حل البرنامج وتحديد ما إذا كان مناسبا أو غير مناسب. وفي الباب الثالث نقدم بعض المفاهيم الأساسية لتحليل شبكات الأعمال فنبين أولا كيفية جدولة أوقات تنفيذ أنشطة المشروع وتحديد المسار الحرج، ونتناول استخدام الأوقات الثلاثة المقدرة لتنفيذ أنشطة المشروع في أسلوب تقويم البرامج ومراجعتها ثم نبين كيفية استخدام التحليل الشبكي في اختصار أزمنة التنفيذ مع أقل تكلفة ممكنة.

وقد ركزنا في هذا الكتاب على الجانب التطبيقي، واستعنا بالأمثلة التوضيحية لشرح المفاهيم المختلفة حتى يسهل فهمها، وأملنا أن يكون في المادة التي قدمناها وطريقة عرضها ما يهيء الدارس لتطبيق هذه الأساليب ولدراسة الأساليب الأخرى لبحوث العمليات التي لم يتسع المجال هنا لعرضها.

ولا يفوتني أن أسجل شكري وتقديري إلى سعادة الدكتور أحمد عبدالرحمن الحمّاد رئيس قسم الأساليب الكمية على ملاحظاته القيّمة أثناء إعدادي لهذا الكتاب، وزملائي أعضاء هيئة التدريس بالقسم على تعاونهم الصادق.

والله ولي والتوفيق.

المؤلف

المحتويات

صفحة

صفحة

صفحة

المدخل

● ماهية التحليل الكمي وتطوره في خدمة الإدارة ● مدخل بحوث العمليات في معالجة مشكلات الإدارة وفكرة بناء النماذج

ماهية التحليل الكمي وتطوره في خدمة الإدارة

ظهرت الحاجة ملحة لاستخدام أساليب التحليل الكمي في الإدارة نتيجة لضخامة حجم المشروعات والمؤسسات الحديثة حيث أصبحت المشكلات الإدارية فيها على درجة عالية من التعقيد، وصارت الأساليب التقليدية التي تعتمد على الخبرة الذاتية لمتخذ القرار والتجربة والخطأ غير فعالة، ومن ناحية أخرى فإن نتائج القرارات إن لم تكن محسوبة ومقدرة تقديرا صحيحا قد يترتب عليها أضرار وخسائر لا يمكن تعويضها.

وتستخدم تعبيرات أخرى للإشارة إلى التحليل الكمي في الإدارة مثل بحوث العمليات وعلم القرار والأساليب الكمية وغيرها، وتتناول بصفة عامة تطبيق الطريقة العلمية بالاستعانة بالطرق الكمية لمعالجة مشاكل اتخاذ القرارات في مجال الإدارة، وسنستخدم تعبير بحوث العمليات كمرادف لتعبير التحليل الكمي في الإدارة وهو عنوان المقرر.

ويلاحظ أن فكرة تطبيق الطريقة العلمية لحل المشكلات الإدارية المختلفة يرجع تاريخها إلى حركة الإدارة العلمية Scientific management movement التي اعتمدت على جهد كثير من العلماء في أوائل القرن الحالي الذين كرسوا جهدهم لحل

المشاكل الناتجة عن نمو الصناعة من ناحية ونقص العمالة من ناحية أخرى وذلك في الولايات المتحدة، وكان أبرزهم فردريك تيلور Fredrick W. Taylor، وسعت هذه الحركة إلى إحلال الأساليب العلمية محل التجربة والخطأ والخبرة الذاتية في اتخاذ القرارات الإدارية، وقد ساهمت هذه الحركة في تطور الفكر الإداري واستخدام الطرق الكمية في زيادة كفاءة العمل والآلات. وكانت أساسا لكثير من المفاهيم والمبادىء التي تستخدم حتى الآن في مجال قياس الوقت والحركة time and motion ومعدلات الأداء work standards وغيرها.

وحتى الحرب العالمية الثانية، لم تكن لبحوث العمليات شخصية مميزة، ولكن كانت هناك محاولات فردية غير مترابطة في إطار ما نسميه الآن بحوث العلميات لعل أبرزها محاولة إيرلنج A.K. Erlang عام ١٩١٠م لدراسة بعض مشكلات الاتصالات باستخدام الأساليب الرياضية والإحصائية، وقد ساهمت هذه الدراسة في وضع أسس نظرية الصفوف Queuing Theory فيما بعد. وهناك أيضا محاولة توماس إديسون Thomas Edison خلال الحرب العالمية الأولى لدراسة كيفية حماية السفن التجارية من الغواصات المعادية، ومحاولة هارس F. W. Harris لتطبيق بعض النماذج الرياضية في ضبط المخزون، وكانت هناك أيضا محاولات لاستخدام الأساليب الرياضية والإحصائية في مجالات الهندسة الصناعية والتسويق وغيرها. ولكن هذه المحاولات لم تستند إلى فلسفة محددة أو منهج معروف.

وكانت البداية الحقيقية لبحوث العمليات في الحرب العالمية الثانية حينما تكونت أول لجنة أطلق عليها اسم لجنة بحوث العمليات في قيادة القوات الجوية البريطانية عام ١٩٣٥م، وذلك من علماء وباحثين متخصصين في مجالات مختلفة لدراسة كيفية تحسين نظم الرادار، وتكونت لجان بحوث عمليات أخرى لدراسة الاستخدام الأكثر كفاءة للموارد الحربية المتاحة من المعدات والرجال، وقد أثبت تطبيق بحوث العمليات نجاحا كبيرا في مجال تطوير العمليات العسكرية وزيادة كفاءتها. وكان لذلك أثر في اهتمام الولايات المتحدة بتكوين لجان مشابهة، فقد قامت جامعة برنستون Princeton University ومعهد ماساشوسيتش للتكنولوجيا MIT

بتدريب عدد كبير من الباحثين في هذا المجال وأسهمت هذه اللجان في معالجة الكثير من مشكلات الحرب.

وقد تبين بعد الحرب أن كثيرا من الأساليب التي استخدمت في المجال العسكري يمكن أن تطبق في مجال الإدارة وذلك لمعالجة مشكلات ما بعد الحرب وتعويض النقص في الإنتاج بسبب تحويل جزء من الطاقة الإنتاجية التي وجهت أثناء الحرب إلى خدمة المجال العسكري وتدمير كثير من المصانع. وقد ساهم العلماء والباحثون الذين اجتذبتهم مراكز البحوث والمؤسسات الحكومية والجامعات من الذين كانوا يعملون في لجان بحوث العمليات العسكرية في تطوير هذه الأساليب لمعالجة المشكلات الإدارية، وساعد استخدام الحاسبات الآلية وتطورها على تسهيل تطبيقها وانتشارها.

ومن أهم أساليب بحوث العمليات التي ظهرت في أوائل الخمسينيات أسلوب البرمجة الخطية Linear Programming بسبب جهود دانتزج (Dantzig, 1963) في هذا المجال، وتستخدم البرمجة الخطية لمعالجة كثير من المشاكل في المجال الإداري والصناعي مثل التكوينة المثلى من المواد الخام والتكوينة المثلى من المنتجات وكيفية توزيع المنتجات من المصانع إلى الأسواق وغيرها.

وبدأ استخدام أسلوب تقويم ومراجعة البرامج Project Evaluation and Review Technique (PERT)، وطريقة المسار الحرج Critical Path Method (CPM) منذ أواخر الخمسينيات في تخطيط المشروعات الكبيرة ومتابعة تنفيذها. وأثبت هذان الأسلوبان فعاليةكبيرة في تخفيض زمن وتكلفة تنفيذها. وكان أبرز تطبيق لأسلوب تقويم ومراجعة البرامج في البرنامج المعروف باسم برنامج بولاريس Polaris Program في البحرية الأمريكية وذلك لإطلاق الصواريخ بواسطة غواصات متحركة، ويتكون هذا البرنامج من عدد كبير جدا من الأنشطة المرتبطة التي نفذ بعضها في أكثر من سنة، وتم إنجازه قبل الوقت المحدد بسنتين مع تخفيض كبير في التكلفة بفضل تطبيق هذا الأسلوب. وكان أبرز تطبيق لطريقة المسار الحرج بواسطة شركة دوبونت DuPont الأمريكية في مشروع تجديد وصيانة أحد مصانع الكيمياويات في الشركة.

ويلاحظ أن كبر حجم المشروعات وزيادة المنافسة بينها والاتجاه نحو استخدام الأساليب التقنية الحديثة، والوقت القصير الذي يجب أن يتم فيه اتخاذ بعض القرارات المهمة وظهور الحاسبات الآلية ذات الكفاءة العالية، كل هذه العوامل أدت إلى سرعة تطبيق أساليب بحوث العمليات لاتخاذ القرارات في المجال الإداري. وقد تم تطوير هذه الأساليب حتى تناسب المشاكل التي تستخدم لمعالجتها، فعلى سبيل المثال طورت أساليب لمعالجة مشاكل طوابير الانتظار وضبط المخزون واتخاذ القرارات في الحالات غير المؤكدة واتخاذ القرارات في المواقف التنافسية وغيرها.

وقد قامت كثير من المنشآت بإعداد بعض العاملين بها للعمل في مجال بحوث العمليات، واهتمت الجامعات ومراكز البحث العلمي بإدخال أساليب بحوث العمليات في خططها الدراسية والبحثية. وظهرت برامج لمنح الدرجات العلمية الجامعية في بحوث العمليات، وتأسس عدد كبير من الجمعيات العلمية التي تعقد الندوات لمناقشة الأبحاث الجديدة في هذا المجال مثل جمعية بحوث العمليات في إنجلترا Operational Research Society وجمعية بحوث العمليات الأمريكية The Operations Research Society of America (ORSA) وجمعية بحوث العمليات المصرية وغيرها. وأنشئت معاهد متخصصة في هذا المجال مثل معهد علوم الإدارة The Institute of Management Sciences (TIMS) والمعهد الأمريكي لعلوم القرار The American Institute of Decision Sciences (AIDS). كما صدرت مجلات دورية متخصصة لنشر الأبحاث الجديدة في هذا المجال منها مجلة بحوث العمليات ربع السنوية The Operational Research Quarterly التي تصدرها جمعية بحوث العمليات في إنجلترا، ومجلة بحوث العمليات Operations Research التي تصدرها جمعية بحوث العمليات الأمريكية، ومجلة Interfaces التي تصدرها جمعية بحوث العمليات الأمريكية بالاشتراك مع معهد علوم الإدارة، وكذلك مجلة علوم القرار Decision Sciences التي يصدرها المعهد الأمريكي لعلوم القرار.

ويلاحظ أن بحوث العمليات نشأت وتطورت نتيجة للحاجة الملحة إلى حل مشكلات معينة سواء في المجال العسكري أو في المجال المدني، فهي مرتبطة بالمجال التطبيقي.

ومن الخصائص المميزة لبحوث العمليات أنها تعتمد على منهج متكامل لتحليل المشكلات ودراستها وذلك بالتعرف على الجوانب المختلفة التي تحكم المشكلة المدروسة والأهداف المراد تحقيقها والبدائل التي تؤدي إلى الوصول إلى هذه الأهداف . . . الخ، وذلك باستخدام الطرق الكمية الملائمة. ويتم اتخاذ القرار المناسب في ضوء نتائج التحليل الكمي من ناحية وبناء على التقدير أو الحكم الشخصي judgement لمتخذ القرار من ناحية أخرى، وذلك لأن الحكم الشخصي لمتخذ القرار يأخذ في الاعتبار أيضا العوامل التي لم تتم صياغتها صياغة كمية.

وتتطلب دراسة بحوث العمليات وتطبيقها في المجال الإداري خلفية في العلوم المرتبطة بطبيعة المشكلة محل الدراسة مثل العلوم الإدارية والاقتصادية، وكذلك خلفية في الطرق الكمية التي يمكن استخدامها مثل الإحصاء والرياضيات، ويلاحظ أن لجان بحوث العمليات التي تكونت أثناء الحرب العالمية الثانية وبعدها كانت تضم متخصصين في مجالات مختلفة حسب طبيعة المشكلات التي تعالجها، فكانت تضم متخصصين في العلوم العسكرية والتكتيك الحربي والعلوم الإدارية والاقتصادية والهندسية من ناحية، ومتخصصين في الإحصاء والرياضيات والعلوم الطبيعية من ناحية أخرى.

مدخل بحوث العمليات في معالجة مشكلات الإدارة وفكرة بناء النماذج

يمكن توضيح مدخل بحوث العمليات في معالجة مشكلات الإدارة وفكرة بناء النماذج فيما يلي:

١ - تحديد المشكلة وصياغتها Problem formulation

ويتطلب ذلك تحديد الأهداف المراد تحقيقها والبدائل المتاحة والمتغيرات التي يتحكم فيها متخذ القرار والقيود التي يتم بناء عليها صياغة القرار مثل متطلبات الإنتاج والموارد المالية المتاحة . . . الخ، ويتطلب ذلك أيضا تحديد معيار اتخاذ القرار أي معيار الاختيار بين البدائل المختلفة، ويتمثل هذا المعيار في تعظيم العائد أو

تخفيض التكلفة أو تخفيض الوقت . . . الخ حسب طبيعة المشكلة المدروسة، وينتج عن ذلك توصيف كامل للمشكلة verbal description ويكون أساسا لصياغتها صياغة كمية مناسبة.

٢ - بناء نموذج رياضي Model construction

أي صياغة المشكلة صياغة كمية أو رياضية مناسبة، وتأخذ هذه الصياغة صورا مختلفة حسب طبيعة المشكلة والمعيار المستخدم لاتخاذ القرار، والنموذج الرياضي هو عرض مبسط للواقع في صورة رياضية. وحيث إن الواقع أكثر تعقيدا من أن يتم التعبير عنه تماما في صورة رياضية فإن النموذج يكون عادة أقل تعقيدا من الواقع.

٣ - إيجاد حل للنموذج Solution generation

يتم بناء النماذج عادة من معادلات ومتباينات ودوال رياضية . . . الخ ونحصل على حل رياضي دقيق للمشكلة المدروسة، ويعرف الحل في هذه الحالة بالحل التحليلي analytical solution ويمكن كتابته في صورة إجراءات وخطوات algorithm أي الخوارزمية نسبة إلى العالم العربي محمد بن موسى الخوارزمي(*)، وإذا لم نتمكن من تصميم الصياغة الرياضية المناسبة للمشكلة المدروسة أو إيجاد حل للنموذج الرياضي الناتج، فإننا نستخدم أسلوب المحاكاة Simulation وذلك لأن هذا الأسلوب لا يتضمن دوال رياضية محددة ولكن يعتمد على إجراء تجارب لتمثيل أداء الموقف المدروس وسلوكه وذلك وفقا لقيم عشوائية تمثل الظواهر أو المتغيرات الاحتمالية التي تحكم سير الموقف، وتعرف المحاكاة في هذه الحالة بمحاكاة مونت كارلو Monte Carlo Simulation. وتخضع نتائج المحاكاة في هذه الحالة لاختبارات

(*) تذكر موسوعة المورد تأليف منير البعلبكي في المجلد الأول الطبعة الأولى ١٩٨٠م، ص٨١: أن «الخوارزمي، محمد بن موسى (٧٨٠ - ٨٥٠م) رياضي وعالم فلك عربي، يعتبر واضع علم الجبر وله كتاب في علم الحساب لم يحفظ لنا إلا في ترجمته اللاتينية وهي بعنوان Algoritmi de numero Indorun ومن هذا العنوان نشأت لفظة algorism التي تعني في الإنجليزية علم الحساب».

الاستدلال الإحصائية مثل تقدير فترة موثوقية هذه النتائج وتحديد العدد الأمثل لتجارب المحاكاة الذي يقابل الحجم الأمثل للعينة، ويعتمد ذلك على أن نتائج المحاكاة تمثل نتائج عينة مسحوبة من المجتمع، وأن كل محاولة من محاولات المحاكاة تمثل مشاهدة في العينة.

وقد تكون الصياغة الرياضية للنموذج معقدة لدرجة أنها لا تؤدي إلى حل دقيق أو قد تكون إجراءات الحل طويلة وغير عملية، لذلك تستخدم الطريقة التقريبية heuristic method التي تعتمد على إجراء تقريبات متتالية، وفي كل تقريب يتم الانتقال من نقطة ممكنة للحل إلى نقطة أخرى بهدف تحسين قيمة معيار النموذج مثل زيادة قيمة الربح أو تخفيض قيمة التكلفة أو الوقت. . . الخ وذلك حتى نصل إلى النقطة التي تقابل أكبر تحسين ممكن. وتكون هذه النقطة قريبة من النقطة المقابلة للحل التحليلي أو قد تساويها، ومن الأمثلة على ذلك الطريقة المعروفة بطريقة تقريب ڤوجل Vogel Approximation Method لحل مشكلة النقل، وسنعرض هذه الطريقة ضمن الطرق المختلفة لحل مشكلة النقل.

٤ – اختبار النموذج والحل Validation

حيث إن النموذج ما هو إلا تعبير عن الواقع فإنه يجب مقارنة النتائج التي يصل إليها والتي تعرف بالحل النظري بما يحدث فعلا في الواقع، ويساعد ذلك على تقويم حل النموذج وتحديد ما إذا كان مناسبا valid أو غير مناسب. فعلى سبيل المثال، إذا كان النموذج يبحث في تحقيق أكبر ربح بإيجاد التكوينة المثلى من المنتجات في مصنع معين فإننا نقارن الكميات التي ينتجها المصنع فعلا من كل منتج بالكميات التي نتجت من الحل، أي الكميات المثلى وإذا كان المصنع ينتج ثلاثة منتجات مثلا فقد يشير الحل إلى أن إنتاج منتج واحد أو منتجين يكون أفضل، ولكن هذا الحل قد لا يرضي متخذ القرار لأن العميل قد يتحول عن الشراء من المصنع إذا لم يشتر منه المنتجات الثلاثة معا وفي هذه الحالة يجب إعادة صياغة النموذج مع أخذ ذلك في الاعتبار، وإذا ثبتت صلاحية النموذج وإمكانية تطبيقه يتم التعرف على التحسن

الذي يمكن أن يطرأ على النظام المدروس نتيجة تطبيق الحل النظري في الواقع، فيتم مثلا التعرف على مقدار الزيادة في العائد أو الخفض في التكلفة أو في الوقت. . . الخ. ومن ناحية أخرى، قد يكون من الضروري التعرف على مدى حساسية الحل للتغيرات التي قد تحدث في أحد ثوابت النموذج، فقد يتغير معدل ربح المنتجات المدروس نتيجة تغير تكلفة المواد الأولية أو تكلفة المواد الداخلة في العملية الإنتاجية أو سعر المنتج وفي هذه الحالة يجب معرفة مقدار الزيادة اللازمة في ربح الوحدة من منتج معين لا يوجد في الخطة الإنتاجية المثلى حتى يمكن أن يدخل في هذه الخطة، أو مقدار النقص اللازم في ربح الوحدة من منتج معين موجود في الخطة الإنتاجية المثلى حتى يستبعد من هذه الخطة. كما قد تتغير كمية الموارد المتاحة نتيجة نقص أو تأخير في وصول بعض المواد الأولية، وفي هذه الحالة يجب معرفة الحدود التي يمكن أن تزيد أو تنخفض بها الكمية المتاحة من مورد معين بحيث تبقى الأهمية بالنسبة لهذا المورد أو القيمة الحدية له والتي تعرف بسعر ظله - ثابتة. وسنتناول ذلك عند عرض موضوع الثنائية وأسعار الظل وتحليل الحساسية في الفصل الرابع من الباب الأول.

٥ - تنفيذ الحل Implementation

في ضوء نتيجة حل النموذج وبناء على الحكم الشخصي لمتخذ القرار الذي يأخذ في الاعتبار الظروف الأخرى المحيطة بالمشكلة التي لم يتم صياغتها صياغة كمية، يتخذ القرار المناسب ثم تحول عناصر هذا القرار إلى إجراءات تنفيذية تبلغ للمسؤولين عن تنفيذها.

ويلاحظ أن المراحل السابقة تتفق مع مراحل تطبيق الطريقة العلمية في البحث والتي تعتمد بصفة عامة على تحديد المشكلة ووضع الفروض والبدائل الممكنة لحلها وتقويم نتائج هذه البدائل واختيار البديل المناسب. ويتفق ذلك مع طبيعة بحوث العمليات التي تستند إلى تطبيق الطريقة العلمية بالاستعانة بالطرق الكمية وذلك لاتخاذ القرار المناسب.

وعند بناء النموذج الرياضي يمكن التفرقة بين الأنواع الآتية من النماذج :

النماذج الوصفية والنماذج القرارية Descriptive and normative models

يهتم النموذج الوصفي ببيان طريقة أداء النظام المدروس وخصائصه المميزة، ويمكن أن يتنبأ بخصائصه في المستقبل ولكن لا يهتم بتحديد التصرف الأمثل، وذلك بعكس النموذج القراري الذي يهتم بإيجاد التصرف الأمثل أي تحديد ما يجب أن يكون، ويمكن أن يحتوى النموذج القراري على نماذج جزئية وصفية. وتتكون أغلب النماذج القرارية من ثلاثة عناصر رئيسة :

١ - المتغيرات القرارية والمؤشرات Decision Variables and Parameters

المتغيرات القرارية هي الكميات غير المعروفة التي يحددها الحل وتخضع لإرادة متخذ القرار، مثل الكميات المطلوب إنتاجها من منتجات مختلفة أو الكميات المطلوب نقلها من منطقة إنتاجية معينة إلى مركز استهلاكي معين. . . الخ. والمؤشرات أو الثوابت هي الكميات المعروفة الثابتة التي يتم بناء عليها تحديد الكميات غير المعروفة أو المتغيرات، مثل كمية المستخدم من مورد معين لإنتاج وحدة واحدة من منتج ما، أو معدل ربح أو تكلفة منتج معين، أو معدل تكلفة النقل من المصنع إلى سوق معين. . . الخ.

٢ - القيود Constraints

وهي تمثل المحددات الطبيعية التي تحصر المتغيرات في حدود معينة feasible values، ويعبر عنها عادة في صورة دوال رياضية أو نماذج جزئية وصفية، فإذا افترضنا أن X_2 و X_1 متغيرات قرارية تمثل الكمية التي يجب إنتاجها من منتجين معينين، وإن a_2 و a_1 مؤشرات تعبر عن كمية المادة الخام اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج، وأن b هي كمية المادة الخام المتاحة، فإن القيد المقابل هو :

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b$$

٣ - دالة الهدف Objective function

يعبر عن فعالية النموذج كدالة في المتغيرات القرارية بوساطة دالة الهدف، فإذا كان الهدف هو تعظيم الربح فإن دالة الهدف تعبر عن الربح بدلالة المتغيرات القرارية. فمثلا إذا كان معدل الربح للمنتج الأول 4 وللمنتج الثاني 5، فإن دالة الهدف هي تعظيم الدالة:

$$Z = 4X_1 + 5X_2$$

حيث تشير X_1 إلى كمية المنتج الأول، وتشير X_2 إلى كمية المنتج الثاني.

وبصفة عامة، ينتج الحل الأمثل للنموذج عندما تحقق قيم المتغيرات القرارية أفضل قيمة لدالة الهدف مع مراعاة ظروف الموقف المدروس التي يعبر عنها بواسطة القيود.

النموذج المحدد والنموذج الاحتمالي Deterministic and stochastic model

في النماذج المحددة، تكون مؤشرات النموذج محددة أي لا يدخل فيها العنصر الاحتمالي بعكس الحال في النماذج غير المحددة أو الاحتمالية التي تتضمن عدم التأكد بالنسبة لمؤشر أو أكثر فيها، ويلاحظ أنه إذا كان النموذج الاحتمالي قراريا، فإن النتائج التي نحصل عليها منه تكون في صورة قيم متوقعة expected values.

النموذج الخطي والنموذج غير الخطي Linear and nonlinear model

إذا كانت جميع علاقات النموذج خطية يكون النموذج خطيا مثل البرمجة الخطية أما إذا كانت علاقة أو أكثر من علاقات النموذج غير خطية فيكون النموذج غير خطي مثل البرمجة غير الخطية ونماذج الصفوف والمخزون.

النماذج الساكنة والنماذج الديناميكية Static and dynamic models

النموذج الساكن هو الذي تبقى مؤشراته بدون تغيير أثناء عملية الحل ويعرّف عند نقطة زمنية محددة وذلك بعكس النموذج الديناميكي الذي تتغير مؤشراته خلال

الفترة محل الدراسة . ويتم حل النموذج الديناميكي من خلال سلسلة متتابعة من المراحل stages مثل البرمجة الديناميكية dynamic programming وعمليات ماركوف Markov processes .

ونعرض فيما يلي باختصار الأساليب والنماذج الرئيسة لبحوث العمليات وذلك لبيان طبيعة كل منها والمشكلات التي تعالجها .

نموذج البرمجة الخطية

تعتبر البرمجة الخطية من أهم نماذج بحوث العمليات وأكثرها استخداما في الحياة العملية ، وتستخدم بصفة عامة لبيان الاستخدام الأكثر كفاءة لمجموعة من الأنشطة التي يمكن القيام بها بواسطة طرق بديلة وذلك في ظل إمكانيات وموارد محدودة مثل إيجاد المزيج من المنتجات التي ينتجها مصنع معين لتحقيق أكبر ربح طبقا للمتاح من العمل والمواد الخام أو طريقة نقل منتجات من مناطق إنتاجية معينة إلى مراكز استهلاكية معينة بحيث تقوم كل منطقة إنتاجية بتوزيع منتجاتها ويشبع كل مركز استهلاكي طلبه بأقل ما يمكن من تكاليف النقل . . . الخ .

والبرنامج الخطي نموذج قراري يتكون كما ذكرنا من المتغيرات القرارية والمؤشرات والقيود ودالة الهدف ، وجميع علاقاته خطية ولا يدخل العنصر الاحتمالي في مؤشراته ولذلك فهو نموذج محدد .

وقد كان لاستخدام طريقة السمبلكس التي طورها دانتزج عام ١٩٤٧م لحل البرنامج الخطي أثر كبير في زيادة وانتشار التطبيقات العملية لهذا النموذج ، وساعد على ذلك الاستعانة بالحاسبات الآلية المتطورة في حله بحيث يمكن معالجة برنامج يتكون من مئات من المتغيرات بسهولة .

برمجة الأهداف Goal programming

تعبر دالة الهدف في البرنامج الخطي عن هدف واحد فقط مثل تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة . ويواجه متخذ القرار في الحياة العملية كثيرا من المواقف الإدارية التي تتضمن تحقيق أهداف متعددة قد تكون متنافسة مثل تخفيض التكلفة وتحسين

مستوى خدمة العميل وقد تكون ذات وحدات قياس مختلفة مثل تعظيم الربح وتعظيم عدد المستهلكين . . . الخ ويمكن دراسة هذه المواقف باستخدام أسلوب برمجة الأهداف وهو امتداد لأسلوب البرمجة الخطية . ويتم صياغة برنامج الأهداف بتحديد الأهداف goals المراد تحقيقها والقيم المقابلة لكل هدف والتي تعرف بالقيم المستهدفة target values ثم يعبر عن كل هدف بقيد يعرف بقيد الهدف في صورة معادلة تحتوي على متغيرين يمثل أحدهما الكمية الزائدة عن القيمة المستهدفة ويمثل الآخر الكمية الناقصة ، ويعرف هذين المتغيرين بالمتغيرين الانحرافيين deviation variables ويتم صياغة دالة الهدف في صورة تصغير مجموع متغيرات الانحرافات ، ويمكن تقدير معامل يقابل كل هدف يسمى معامل أولوية a priority factor يعكس درجة تفضيل متخذ القرار للهدف ، وتشمل القيود الهيكلية لبرنامج الأهداف قيود البرنامج الأصلي بالإضافة إلى قيود الأهداف ، ويتم حله باستخدام طريقة السمبلكس وذلك بعد تعديلها حتى تأخذ في الاعتبار معاملات الأولوية .

البرمجة الرقمية Integer programming

يلاحظ أن المتغيرات القرارية في البرنامج الخطي متغيرات مستمرة وعلى ذلك فإنه يمكن أن تكون قيم الحل الأمثل في صورة كسرية ، ويناسب ذلك كثيرا من المواقف الإدارية ولكن قد لا يناسب مواقف معينة ، فمثلا عند اختيار التكوينة الأقل تكلفة من أنواع من الطائرات المطلوب شرائها طبقا للتكلفة ووقت الصيانة والطاقة الاستيعابية لكل نوع ليس من المناسب أن تكون أعداد الطائرات المطلوب شرائها من كل نوع في صورة أعداد كسرية ، وكذلك عند اختيار التكوينة الأكثر ربحا من المشروعات من بين مشروعات متعددة طبقا للموارد المالية المتاحة بحيث يقابل كل متغير قراري مشروعا معينا يتم اختياره عندما تكون قيمته واحد ولا يتم اختياره عندما تكون قيمته صفر .

ويتم دراسة هذه المواقف باستخدام أسلوب البرمجة الرقمية الذي ينقسم إلى ثلاثة أقسام بحسب نوع المتغيرات القرارية التي يتضمنها البرنامج :

البرمجة الرقمية العامة General I.P. : وهي التي تكون قيم جميع المتغيرات القرارية فيها في صورة صحيحة.

البرمجة الرقمية المزدوجة Binary integer programmming : وهي التي تكون قيم المتغيرات القرارية فيها إما صفر أو واحد.

البرمجة الرقمية المختلطة Mixed integer programming : وهي التي تكون قيم بعض المتغيرات القرارية مستمرة وبعضها الآخر في صورة أرقام صحيحة.

ويلاحظ أن بعض مواقف البرمجة الرقمية لها هيكل خاص وأمكن اقتراح طرق خاصة بحلها مثل مشكلة النقل ومشكلة التعيين، ولحل البرامج الرقمية التي تحتوي على متغيرين قراريين فقط يمكن استخدام الطريقة البيانية، ولكن عندما يكون عدد المتغيرات أكثر من اثنين يتم أولا حل البرنامج باستخدام طريقة السمبلكس ثم تستخدم إحدى طرق الحل المعروفة لإيجاد قيم المتغيرات القرارية في صورة صحيحة مثل طريقة القطع cutting method وهي تتضمن الحذف المتتالي لأجزاء من منطقة الحلول الممكنة الممثلة للقيود بإضافة قيود جديدة وكذلك طريقة التفرع والحد branch and bound method وتتلخص في أن نأخذ أيا من المتغيرات غير الصحيحة وليكن X_k ونفرض قيدين: $X_k \geq C + 1$ و $X_k \leq C$ حيث C يشير للجزء الصحيح في قيمة المتغير X_k. ونحل البرنامج الجديد باستخدام طريقة السمبلكس، فإذا كانت قيم الحل في صورة صحيحة نستمر في ذلك مع استبعاد الحلول غير الممكنة والحلول التي تعطي قيما غير صحيحة. ويعيب طرق حل البرنامج الرقمي أنها تتطلب عددا كبيرا من الخطوات خاصة مع زيادة عدد المتغيرات القرارية.

البرمجة غير الخطية Non-linear programming

في نموذج البرمجة الخطية تكون دالة الهدف وجميع القيود الهيكلية في صورة خطية ويعني ذلك أن معاملات المتغيرات في دالة الهدف وكذلك في القيود الهيكلية تكون متناسبة مع قيمة المتغير المقابل، فعلى سبيل المثال إذا كان ربح الوحدة من منتج معين 10 ريال فإن ربح 5 وحدات هو 50 ريالا وربح 100 وحدة هو 1000 ريال وهكذا، ومن ناحية أخرى إذا كان المطلوب 7 وحدات من مورد معين لإنتاج وحدة من منتج

منتج معين فإنه يلزم 70 وحدة من المورد لإنتاج 10 وحدات من هذا المنتج ويلزم 700 وحدة من المورد لإنتاج 100 وحدة من هذا المنتج وهكذا. ويستخدم هذا النموذج في صياغة وحل عدد كبير من المواقف الإدارية، ولكن يلاحظ أن هناك مواقف كثيرة في مجالات تخصيص الموارد وتخطيط الاستثمار وغيرها ينتج من صياغتها علاقة أو أكثر من العلاقات في صورة غير خطية ويسمى النموذج في هذه الحالة البرنامج غير الخطي، ويعتمد حله بصفة عامة على حساب التفاضل لإيجاد قيم المتغيرات القرارية التي تحقق النهايات العظمى أو الصغرى لدالة الهدف وذلك باستخدام مضاعفات لاجرانج Lagrange multipliers إذا كانت القيود الهيكلية في صورة معادلات، وباستخدام شروط كون توكر Khun Tucker conditions ومضاعفات لاجرانج إذا كانت القيود الهيكلية في صورة متباينات.

البرمجة التربيعية Quadratic programming

تصاغ كثير من المواقف الإدارية بحيث تكون دالة الهدف في صورة تربيعية والقيود الهيكلية في صورة خطية والمتغيرات القرارية غير سالبة، ويعرف النموذج الناتج بنموذج البرمجة التربيعية وهو حالة خاصة من نموذج البرمجة اللاخطية مثل نموذج سلوك المستهلك consumer behavior model الذي تكون فيه دالة المنفعة (دالة الهدف) في صورة تربيعية ودالة الميزانية في صورة خطية، وكذلك نموذج المنشأة The firm model عندما تكون كمية الطلب دالة خطية في السعر وبالتالي تكون دالة العائد (دالة الهدف) في صورة تربيعية والقيود المرتبطة بالإنتاج (القيود الهيكلية) في صورة علاقات خطية، ونماذج توزيع المحافظ portfolios models التي تكون دالة الهدف فيها مكونة من جزأين يمثل أحدهما العائد المتوقع من المحفظة الذي يكون في صورة خطية ويمثل الآخر تباين قيمة المحفظة الذي يكون في صورة تربيعية، وكذلك نماذج توزيع الموارد على المشروعات على المستوى القطاعي والإقليمي وغيرها.

ومن طرق الحل المعروفة في هذا المجال طريقة السمبلكس لفولف Wolfe's simplex method for Q.P. وهي تعتمد على استخدام مضاعفات لاجرانج وشروط كون توكر بالإضافة إلى طريقة السمبلكس.

البرمجة العشوائية Stochastic programming

في البرنامج الخطي نفرض أن مؤشرات النموذج (معاملات المتغيرات في دالة الهدف وفي القيود الهيكلية والطرف الأيمن للقيود الهيكلية) ثابتة لا تتغير، ولكن في الحياة العملية قد يتغير بعض أو جميع هذه المؤشرات نتيجة لعوامل خارجة عن إرادة متخذ القرار مثل تغير معدلات الربح أو التكلفة أو تغير معدلات استخدام الموارد في العملية الإنتاجية أو تغير الموارد المتاحة نتيجة تأخر وصولها . . . الخ ولذلك يكون من المفيد دراسة أثر التغير في هذه المؤشرات على الحل الأمثل والذي يعرف بتحليل الحساسية. وإذا أمكن وصف مؤشر أو أكثر من مؤشرات النموذج باستخدام متغيرات عشوائية فإن النموذج الناتج يعرف بالبرنامج العشوائي، ومن الطرق المعروفة لحله طريقة البرمجة المقيدة العشوائية chance constrained programming حيث تقدر القيم المتوقعة لدالة الهدف وتعامل معاملات المتغيرات القرارية في القيود الهيكلية أو الطرف الأيمن لها أو كليهما كمتغيرات عشوائية ذات توزيعات احتمالية معينة.

تحليل شبكات الأعمال باستخدام أسلوب تقويم البرامج ومراجعتها وطريقة المسار الحرج

من أهم الطرق المستخدمة في مجال التنسيق بين أوقات تنفيذ أنشطة المشروع ومتابعة سيرها أسلوب تقويم ومراجعة البرامج وطريقة المسار الحرج.

ويعتمد أسلوب تقويم ومراجعة البرامجة على تقسيم المشروع المدروس إلى عدد من الأنشطة المستقلة ثم رسم شبكة أعمال المشروع على أساس أن كل نشاط يمكن أن يبدأ وينتهي مستقلا عن غيره ولكن في تتابع معروف، أي أن لكل نشاط مجموعة من الأنشطة التي تسبقه ومجموعة أخرى تليه زمنيا. ويهتم أسلوب تقويم ومراجعة البرامج بالوقت المتوقع لانتهاء المشروع، ويمكن أن يدخل العنصر الاحتمالي في تقدير أوقات تنفيذ أنشطة المشروع، وفي هذه الحالة يكون النموذج احتماليا.

وتأخذ طريقة المسار الحرج في الاعتبار بالإضافة إلى عنصر الوقت عنصر التكلفة، وذلك على أساس أن الأوقات المقدرة لتنفيذ أنشطة المشروع مرتبطة بمستوى

معين من الموارد، وأنه يمكن زيادة تكلفة تنفيذ بعض الأنشطة لتخفيض زمن تنفيذ المشروع. وتحدد هذه الطريقة الخطط البديلة لتخفيض زمن تنفيذ المشروع بأقل تكلفة ممكنة.

وقد تم تطوير أسلوب تقويم ومراجعة البرامج وطريقة المسار الحرج واندمج كل منهما في الآخر ليكونا معا ما يسمى بتحليل شبكات الأعمال.

نظرية القرارات Decision theory

تهتم نظرية القرارات بتقديم الإطار العام للتحليل الكمي للمواقف التي يكون على متخذ القرار فيها أن يختار بين بدائل مختلفة في ظل عنصر الشك incertitude وتتناول الخصائص الهيكلية والسمات المشتركة لاتخاذ القرارات بصفة عامة.

ويمكن تقسيم مواقف اتخاذ القرارات إلى قسمين:

١ - اتخاذ القرارات في ظل عدم التأكد uncertainty أي في حالة عدم إمكانية تقدير التوزيع الاحتمالي للأحداث المدروسة وفي هذه الحالة تستخدم معايير معروفة* مثل معيار أكبر القيم الصغرى للعائد maximin payoff criterion، ويضمن استخدام هذا المعيار الحصول على عائد معين كحد أدنى بصرف النظر عن الحدث الذي يتحقق، ومعيار أصغر القيم العظمى للأسف minimax regret criterion حيث إن الأسف هو مقدار الخسارة الناتجة عن عدم اختيار أفضل تصرف، ويضمن استخدام هذا المعيار أن الأسف لا يزيد عن حد معين، ومعيار تساوي احتمالات الأحداث equally likely events criterion.

٢ - اتخاذ القرارات في ظل المخاطرة risk أي في حالة إمكانية تقدير التوزيع الاحتمالي للأحداث سواء من التكرارات النسبية لحدوث هذه الأحداث في الماضي أو من التقدير الشخصي للخبير أو الخبراء المهتمين بالمشكلة، ويمكن أيضا الاستفادة

---

* لمزيد من التفاصيل حول هذه المعايير انظر على سبيل المثال المرجعين:
R.D. Luce and H.Raiffa (1957). *Games and Decisions.* New York: John Wiley & Sons, pp. 278-326 and R.Davis & P. Mckeown (1981). *Quantative Models for Management.* Bostn, Massach.: Kent Publishing Comppany, pp. 442-450.

من المعلومات التجريبية التي يمكن الحصول عليها بواسطة اختبار أو دراسة أو استقصاء . . . الخ وباستخدام نظرية بايز Baye's Theorem يتم مزج نتيجة التقدير الشخصي أو التكرارات النسبية للأحداث في الماضي ، والتي تعرف بالاحتمالات الأولية prior probabilities ، مع نتيجة المعلومات التجريبية والتي تعرف بالاحتمالات التجريبية experimental probabilities للحصول على ما يسمى بالاحتمالات المعدلة revised probabilities التي تستخدم مع عناصر اتخاذ القرار الأخرى في اتخاذ القرار المناسب ، وذلك بتطبيق معيار أكبر عائد نقدي متوقع أو معيار أصغر أسف متوقع .

ومن المشكلات التي تعالجها نظرية القرارات على سبيل المثال مشكلة اختيار مجال معين من مجالات متاحة للاستثمار مع اختلاف العائد من كل مجال حسب ظروف السوق ومشكلة اتخاذ القرار الخاص بإنتاج منتج جديد في حالة الشك في مدى الطلب عليه ، ومشكلة اتخاذ القرار الخاص بالتنقيب أو عدم التنقيب عن النفط أو الذهب . . . الخ في حالة الشك في وجوده ، وغير ذلك من المشكلات المشكوك في الأحداث المرتبطة بها .

نظرية المباريات الاستراتيجية Theory of games of strategy

تهتم نظرية المباريات الاستراتيجية بدراسة المواقف التنافسية حينما يكون لدينا أكثر من متخذ قرار ، والمفهوم الأساسي الذي تعتمد عليه النظرية هو مفهوم الاستراتيجية وهي التكوينة الممكنة من التصرفات في الحالات التي يوجد فيها متخذ القرار . لذلك سميت بالمباريات الاستراتيجية وذلك تمييزا لها عن المباريات ضد الطبيعة Games against nature والتي تدخل في إطار الأسلوب السابق . والمعيار الذي يعتمد عليه التحليل في نظرية المباريات الاستراتيجية هو معيار أصغر القيم العظمى The minimax criterion .

ومن المشكلات التي يعالجها هذا الأسلوب على سبيل المثال مشكلة تحديد الاستراتيجية التي يختارها طرف معين لتحقيق أقصى عائد أمام طرف أو أطراف أخرى منافسة كاختيار الكمية التي تعرضها مؤسسة من منتج معين لتحقيق أقصى ربح ممكن أمام الكمية المعروضة من مؤسسة أو مؤسسات أخرى منافسة . ومن

المشكلات المهمة التي يعالجها هذا الأسلوب أيضا كيفية توزيع العائد عند اتحاد طرف معين مع طرف أو أطراف أخرى، ويمكن أن يكون الطرف مؤسسة أو شركة أو دولة . . . الخ حسب طبيعة المشكلة محل الدراسة .

نماذج الصفوف Queuing models

تستخدم نماذج الصفوف في دراسة المواقف التي تتسم بنقاط الاختناق وطوابير الانتظار، ويتكون طابور الانتظار عندما تتطلب وحدات أو عملاء الخدمة ولا تحصل عليها في الحال وذلك بسبب عدم توازن الطلب على الخدمة وطاقة مركز الخدمة مثل الآلات التي تحتاج إلى إصلاح في مركز الصيانة في المصنع، أو العملاء الذين يسددون مشترياتهم في السوق التجاري، أو الطلبة عند التسجيل للفصل الدراسي اللاحق، أو الطائرات التي تهبط في إحدى ممرات المطار، أو المرضى في المستشفى الذين ينتظرون دورهم في الفحص . . . الخ .

ولا تقتصر الصفوف على نموذج واحد مثل البرمجة الخطية ولكن توجد نماذج عديدة تقابل مواقف عديدة للصفوف، وتشترك هذه النماذج في أنها تصف الصف وتبين خصائص تشغيله operating characteristics مثل متوسط عدد الوحدات المنتظرة للخدمة . ومتوسط الوقت الذي تنتظره الوحدة للحصول على الخدمة . . . الخ . ولإيجاد هذه الخصائص يتم تقدير مؤشرين أساسيين هما نمط وصول العملاء ونمط أداء الخدمة، ويمكن بتغيير نمط الخدمة الحصول على مجموعات مختلفة من خصائص التشغيل، ومجموعة خصائص التشغيل التي تناسب ظروف متخذ القرار وإمكانياته هي التي تحدد أفضل تنظيم أو أداء للخدمة . ونماذج الصفوف في معظم المواقف العملية نماذج احتمالية لأن نمط الوصول ونمط الخدمة غالبا ما يدخل فيهما العنصر الاحتمالي .

نماذج المخزون Inventory models

يعتبر مجال ضبط المخزون أحد المجالات المهمة لبحوث العمليات حيث إن تطبيق بحوث العمليات في هذا المجال أثبت نجاحا كبيرا في تخفيض التكلفة في

مختلف الوحدات سواء كانت تجارية أو صناعية أو خدمات، ويرجع السبب في ذلك إلى زيادة الأهمية النسبية للاستثمارات المرتبطة بالمخزون، فالتحسن البسيط في ضبط المخزون يمكن أن يؤدي إلى توفير كبير في التكلفة.

والمخزون موارد عاطلة كان يمكن أن تستخدم في زيادة الإنتاج ولكنها تستخدم للحماية من الظروف غير المتوقعة مثل الحاجة إلى قطع غيار لمواجهة التلف المفاجيء لبعض أجزاء الآلات في المصنع، أو الطلب غير المنتظم على منتج معين من المستهلكين أو التوريد غير المنتظم للمواد الأولية بسبب الإنتاج الموسمي لها أو بسبب سوء الحالة الجوية . . . الخ، ويستخدم المخزون كذلك لتخفيض تكلفة الطلبيات أو للاستفادة من الخصم على المشتريات بكميات كبيرة أو للحماية من زيادة الأسعار . . . الخ. ويمكن التعرف على طبيعة مشكلة التخزين بالنظر إلى موقف مدير الإنتاج والمبيعات في مؤسسة معينة والذي يعمل على زيادة كمية المخزون من المواد الأولية والمواد المصنعة وقطع الغيار . . . الخ، بينما يرى المدير المالي أن خفض مستويات المخزون يعني انخفاض تكلفة التخزين والاستفادة من الموارد الموجهة للمخزون. ويهتم القرار في هذه الحالة بالموازنة بين تكلفة التخزين وتكلفة تعطل الآلات وبالتالي تعطل الإنتاج أو المبيعات المفقودة . . . الخ. ويهتم نموذج التخزين بقرارين أساسيين هما كمية الطلبية والزمن بين كل طلبية وأخرى، وذلك بفرض أن الطلب على المنتج والزمن بين كل طلبية وأخرى يمكن أن يكون احتماليا أو محددا.

عمليات ماركوف Markov Processes

وهي عمليات احتمالية تستخدم في تمثيل الأنظمة التي تتحول من حالة state إلى حالة أخرى وذلك بهدف تحليل الحركة الحالية لنظام معين للتنبؤ بحركته في المستقبل.

وقد شاع استخدام عمليات ماركوف في السنوات الأخيرة في الإدارة خاصة في مجال التسويق للتنبؤ بسلوك المستهلكين تجاه صنف معين وتحولهم من صنف لآخر وكذلك في دراسة حركة السكان وتخطيط الإنتاج والمخزون ونماذج صفوف الانتظار وصيانة الآلات . . . الخ.

وتعتمد عمليات ماركوف على فرض ثبات احتمالات تحول الحالة من فترة زمنية إلى فترة زمنية أخرى وعلى وجود فترات زمنية متساوية يتم حساب التحول بينها، ويمكن أن يكون عدد حالات التحول محدودا وهو ما يعرف بسلاسل ماركوف Markov chains، أو مستمرا (غير محدود) وهو ما يعرف بعمليات ماركوف المستمرة Continuous Markov processes.

ومن الخصائص المهمة لتحليل ماركوف أن متجه احتمالات الحالة وهو الذي يعين النسبة التي تؤول إليها كل حالة يؤول إلى الثبات بعد فترة من الوقت وعند ثباته يتحقق شرط الاستقرار steady state condition.

البرمجةالديناميكية Dynamic programming

تستخدم البرمجة الديناميكية لإيجاد الحل الأمثل في المواقف متعددة الخطوات والتي تتضمن مجموعة من القرارات المرتبطة وذلك باستخدام منهج الاستنتاج من الخلف للأمام backward induction approach.

ولصياغة البرنامج الديناميكي لمشكلة معينة يتم تجزئتها إلى خطوات stages ترتبط بمعيار معين حسب طبيعة الموقف محل الدراسة، وعند كل خطوة تعرّف مجموعة من الحالات states، ويتفرع من كل حالة مجموعة القرارات الممكنة، ويحدد مقياس الفعالية في صورة تكلفة أو ربح أو وقت أو أي مقياس آخر ويسمى دالة العائد return function، والقرار الأمثل في كل حالة هو الذي يحقق القيمة المثلى لدالة العائد في الحالة السابقة.

وقد طبق أسلوب البرمجة الديناميكية بنجاح في مجال تحليل شبكات الأعمال وضبط الإنتاج والمخزون وفي دراسة مواقف كثيرة مرتبطة بتخصيص الموارد.

ونقدم في هذا الكتاب بعض المفاهيم الأساسية لأسلوبين من أساليب بحوث العمليات، فنخصص الباب الأول للبرمجة الخطية ونعرض في الباب الثاني تحليل شبكات الأعمال.

الباب الأول

البرمجة الخطية

● الصورة العامة للبرنامج الخطي ● حل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية ● طريقة السمبلكس ● الثنائية وأسعار الظل وتحليل الحساسية ● مشكلة النقل ومشكلة التعيين

الفصل الأول

الصورة العامة للبرنامج الخطي

● مشكلة الإنتاج ● مشكلة التغذية ● فروض البرمجة الخطية

يتكون البرنامج الخطي من دالة خطية تسمى دالة الهدف objective function يجب تعظيمها أو تصغيرها وذلك بالتحكم في متغيراتها التي تخضع لعدد من القيود الخطية في صورة متباينات (متراجحات) أو معادلات أو خليط منهما، وتسمى هذه القيود القيود الهيكلية structural constraints . وقد يكون هناك نوع آخر من القيود على المتغيرات الداخلة في دالة الهدف والقيود الهيكلية تستبعد وجود قيم سالبة لهذه المتغيرات وتعرف بالقيود اللاسالبة non-negativity constraints .

ويهتم البرنامج الخطي بصفة عامة بإيجاد قيم المتغيرات :

$$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$$

التي تعظم أو تصغر الدالة :

$$(1)\quad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

طبقا للشروط الآتية :

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \ (*)\ b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \ (*)\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \ (*)\ b_m \end{cases}$$

$$(3)\quad X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n \geq 0$$

حيث (*) يمكن أن تكون في صورة متساوية (=) أو علاقة متباينة من النوع أقل من أو يساوي (≤) أو من النوع أكبر من أو يساوي (≥) .

وتعرف المعادلة (1) بدالة الهدف، ويعبر X_j عن المتغير القراري decision variable رقم j ويمثل كل ثابت C_j معامل قياس الفعالية وذلك لكل وحدة من X_j ويكون في صورة ربح أو تكلفة أو وقت. . . الخ .

وتمثل المعادلات والمتباينات في (2) القيود الهيكلية للبرنامج حيث تشير a_{ij} إلى كمية القيد رقم i المقابلة لوحدة واحدة من المتغير القراري X_j، وتشير b_i إلى كمية القيد رقم i، ويلاحظ أن a_{ij} و b_i ثوابت أيضا مثل C_j .

وتمثل مجموعة المتباينات (3) الشروط اللاسالبة، وهي شروط منطقية لأن المتغيرات في أغلب التطبيقات والمواقف الإدارية غير سالبة .

وسنعرض فيما يلي الصياغة الرياضية لبعض المشكلات المهمة التي يمكن دراستها بهذا الأسلوب وهي مشكلة الإنتاج ومشكلة التغذية .

مشكلة الإنتاج Mix Product Problem

تتكون العملية الإنتاجية بصفة عامة من مجموعة من الأنشطة المختلفة يساهم كل منها في إنتاج منتج معين وذلك باستخدام مجموعة من الموارد المحدودة لتحقيق هدف يتمثل في تعظيم العائد أو تخفيض الخسارة، ويتم الربط بين هذه الأنشطة والموارد والهدف بواسطة معاملات فنية تبين حاجة كل نشاط من الموارد المتاحة أو مقدار مساهمة النشاط في تحقيق هدف معين، وتكون العلاقات الناتجة في صورة خطية .

سنفترض أن لدينا أنشطة إنتاجية عددها n وقيودا عددها m، وأن المعامل الفني a_{ij} يشير إلى كمية المورد أ اللازم لتشغيل النشاط الإنتاجي j بطاقة تشغيل واحدة وذلك إذا كان هذا المعامل يمثل معاملا فنيا للمستخدم من مورد معين i، فإذا كان لدينا على سبيل المثال مصنعا معينا للأثاث ينتج الطاولات والكراسي ويستخدم موردين نادرين هما الخشب والعمل فإن المعامل الفني للمستخدم من الخشب هو كمية

الخشب اللازمة لإنتاج كرسي وكمية الخشب اللازمة لإنتاج طاولة وبالمثل بالنسبة للمعامل الفني للعمل . ويمكن أن تشير a_{ij} إلى كمية الإنتاج i الناتج من تشغيل النشاط j بطاقة تشغيل واحدة وذلك إذا كان هذا المعامل يمثل معاملا فنيا للإنتاج ، فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا مساحة من الأرض مخصصة لزراعة محاصيل مختلفة فإن المعامل الفني للإنتاج لمحصول معين هو كمية المحصول الناتج من زراعة وحدة المساحة بهذا المحصول .

ونفرض أن b_i تشير إلى كمية المتاح من المورد i ، ففي المثال الخاص بمصنع الأثاث يمكن أن تشير إلى كمية المتاح من الخشب أو إلى كمية المتاح من العمل .

ونفرض أن C_j تشير إلى معدل ربح النشاط j أو إلى معدل تكلفته ، ففي مثال مصنع الأثاث يمكن أن تشير C_j إلى ربح الطاولة أو إلى ربح الكرسي إذا كان الهدف هو تعظيم الربح كما أنها يمكن أن تشير إلى تكلفة الطاولة أو إلى تكلفة الكرسي إذا كان الهدف هو تصغير التكلفة ، ويتوقف ذلك على طبيعة المشكلة محل الدراسة .

سنشير إلى مستوى النشاط j بالرمز X_j ونصوغ البرنامج الخطي المقابل كالتالي :

ما هي قيم X_j حيث

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

التي تعظم (أو تصغر) الدالة :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

$$X_j \geq 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

يؤدي حل هذا البرنامج إلى تحديد طرق الإنتاج المثلى أي الطرق التي تعظم العائد أو تخفض من تكلفة الإنتاج وبالتالي تحدد التوزيع الأمثل للموارد المتاحة وفقا لهذا المعيار .

مثال ١ :

سنفترض أن لدينا منتجين وموردين نادرين يدخلان في إنتاجهما، والكمية المتاحة من المورد الأول 2000 وحدة ومن المورد الثاني 1800 وحدة، ولإنتاج وحدة من المنتج الأول نحتاج إلى وحدتين من المورد الأول وأربع وحدات من المورد الثاني بينما نحتاج لإنتاج وحدة من المنتج الثاني إلى خمس وحدات من المورد الأول ووحدتين من المورد الثاني، والطلب على المنتج الأول لا يزيد عن 400 وحدة والمطلوب هو إيجاد الكميات المثلى من إنتاج كل منتج من شأنها أن تحقق أقصى ربح إذا كان معدل ربح المنتج الأول 80 والمنتج الثاني 50.

لتسهيل صياغة البرنامج الخطي للمشكلة السابقة سنضع المعلومات الخاصة بها في الجدول الآتي :

	المنتج الأول	المنتج الثاني	
المورد الأول	2	5	≤ 2000
المورد الثاني	4	2	≤ 1800
حدود إنتاج المنتج الأول	1	0	≤ 400
معدل الربح	80	50	

سنفترض أن X_1 تشير إلى كمية المنتج الأول، وأن X_2 تشير إلى كمية المنتج الثاني، ويصبح البرنامج كالتالي :

$$\max Z = 80X_1 + 50X_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$2X_1 + 5X_2 \leq 2000$ المورد الأول

$4X_1 + 2X_2 \leq 1800$ المورد الثاني

$X_1 \leq 400$ حدود إنتاج المنتج الأول

$$X_1 ,\ X_2 \geq 0$$

تعبر دالة الهدف في البرنامج السابق عن مجموع الربح المتحقق من المنتجين، ويعبر الطرف الأيسر من المتباينة الأولى عن كمية المستخدم من المورد الأول، ويشير الطرف الأيمن في هذه المتباينة إلى كمية المتاح من هذا المورد، وكذلك بالنسبة للمتباينة الثانية، بينما يشير القيد الثالث إلى أن الكمية المنتجة من المنتج الأول لا تزيد عن 400 وحدة.

مشكلة التغذية Diet Problem

سنفترض أن المطلوب تكوين وجبة غذائية للإنسان أو للحيوان أو للطيور تحتوي على متطلبات غذائية معينة مثل المواد البروتينية والمواد النشوية . . . الخ وذلك باستخدام مجموعة من الأطعمة تحتوي على هذه المتطلبات بنسب مختلفة وذلك بأقل تكلفة ممكنة.

سنفترض أن لدينا أطعمة عددها n ومتطلبات غذائية عددها m وأن المعامل الفني a_{ij} يشير إلى النسبة الموجودة من المادة الغذائية i في وحدة واحدة من الطعام j. وأن C_j يشير إلى معدل تكلفة الطعام j وأن b_i تشير إلى المتطلب الأدنى أو المتطلب الأعلى من المادة الغذائية i. من ذلك يمكن صياغة مشكلة التغذية في الصورة العامة كالتالي:

ما هي كمية X_j حيث $j = 1, 2, ..., n$ الممكن استخدامها من الأطعمة $1, 2, ..., n$ والتي تصغر الدالة:

$$C = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

طبقا للشروط الآتية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i$$

$$(i = 1, 2, ..., m)$$

$$X_j \geq 0$$

$$(j = 1, 2, ..., n)$$

مثال ٢ :

المطلوب تكوين وجبة غذائية للدواجن من نوعين من الحبوب (الذرة والقمح) مع تغطية المتطلبات الدنيا من مادتين غذائيتين : N_1, N_2 وبحيث لا تزيد كمية المادة الغذائية N_3 في الوجبة عن حد معين . سنفترض أن وحدة الذرة تحتوي على 0.08 من N_1 و 0.10 من N_2 و 0.16 من N_3 وأن وحدة القمح تحتوي على 0.05 من N_1 و 0.14 من N_2 و 0.10 من N_3 ، وأن المتطلب الأدنى من N_1 هو 500 ومن N_2 هو 1400 ، وأن الحد الأعلى للكمية المسموح بها في الوجبة من N_3 هو 1600 ، وتكلفة وحدة الذرة 0.5 وتكلفة وحدة القمح 0.8 .

والمطلوب إيجاد الكمية الممكن استخدامها من الذرة والقمح بأقل تكلفة ممكنة .

يمكن تلخيص بيانات المشكلة السابقة في الجدول الآتي :

المتطلبات الكلية	نسبة وجود المادة الغذائية في الوحدة من		المادة الغذائية
	القمح	الذرة	
500	0.05	0.08	N_1
1400	0.14	0.10	N_2
1600	0.10	0.16	N_3
	0.8	0.5	تكلفة الوحدة

لصياغة المشكلة السابقة في صورة برنامج خطي نفترض أن

X_1 تشير إلى كمية الذرة في الخليط ،

X_2 تشير إلى كمية القمح في الخليط ،

والمطلوب هو إيجاد X_1, X_2 التي تصغر الدالة :

$$C = 0.5X_1 + 0.8X_2$$

مثال ٢ :

المطلوب تكوين وجبة غذائية للدواجن من نوعين من الحبوب (الذرة والقمح) مع تغطية المتطلبات الدنيا من مادتين غذائيتين : N_1, N_2 وبحيث لا تزيد كمية المادة الغذائية N_3 في الوجبة عن حد معين . سنفترض أن وحدة الذرة تحتوي على 0.08 من N_1 و 0.10 من N_2 و 0.16 من N_3 وأن وحدة القمح تحتوي على 0.05 من N_1 و 0.14 من N_2 و 0.10 من N_3 ، وأن المتطلب الأدنى من N_1 هو 500 ومن N_2 هو 1400 ، وأن الحد الأعلى للكمية المسموح بها في الوجبة من N_3 هو 1600 ، وتكلفة وحدة الذرة 0.5 وتكلفة وحدة القمح 0.8 .

والمطلوب إيجاد الكمية الممكن استخدامها من الذرة والقمح بأقل تكلفة ممكنة .

يمكن تلخيص بيانات المشكلة السابقة في الجدول الآتي :

المتطلبات الكلية	نسبة وجود المادة الغذائية في الوحدة من		المادة الغذائية
	القمح	الذرة	
500	0.05	0.08	N_1
1400	0.14	0.10	N_2
1600	0.10	0.16	N_3
	0.8	0.5	تكلفة الوحدة

لصياغة المشكلة السابقة في صورة برنامج خطي نفترض أن

X_1 تشير إلى كمية الذرة في الخليط ،

X_2 تشير إلى كمية القمح في الخليط ،

والمطلوب هو إيجاد X_1, X_2 التي تصغر الدالة :

$$C = 0.5X_1 + 0.8X_2$$

طبقا للشروط الآتية:

$$0.08X_1 + 0.05X_2 \geq 500 \qquad N_1 \text{ المادة الغذائية}$$
$$0.10X_1 + 0.14X_2 \geq 1400 \qquad N_2 \text{ المادة الغذائية}$$
$$0.16X_1 + 0.10X_2 \leq 1600 \qquad N_3 \text{ المادة الغذائية}$$
$$X_1 , \quad X_2 \geq 0$$

تشير دالة الهدف في البرنامج السابق إلى مجموع تكلفة النوعين من الطعام، وتعبر المتباينة الأولى في القيود الهيكلية عن أن الكمية المستخلصة من المادة الغذائية N_1 من الذرة والقمح لا تقل عن المتطلب الأدنى وهو 500 وحدة، وكذلك تعبر المتباينة الثانية عن أن الكمية المستخلصة من N_2 من النوعين من الطعام لا تقل عن المتطلب الأدنى من N_2 وهو 1400، وتشير المتباينة الثالثة إلى أن الكمية المستخلصة من N_3 من النوعين من الطعام لا تزيد عن المتطلب الأقصى المسموح به في الخليط من هذه المادة وهو 1600 وحدة.

فروض البرمجة الخطية Assumptions of Linear Programming

عند تطبيق نموذج معين في الحياة العملية يجب التعرف على الفروض التي يعتمد عليها تصميم هذا النموذج ومدى مطابقتها على الموقف محل الدراسة، فكلما انطبقت فروض أو شروط النموذج على الواقع كلما كانت درجة الثقة في التنبؤات أو في القرار الأمثل الناتج من الحل أكبر.

وسنتناول فيما يلي الفروض الرئيسة للبرمجة الخطية وهي التناسب proportionality وقابلية الإضافة additivity وقابلية التجزئة divisibility والتأكد certainty.

فرض التناسب

تتضمن العلاقات الخطية التي يتكون منها البرنامج الخطي فرض التناسب، ويعني هذا الفرض أن كمية كل مورد مستخدم (أو متطلب يجب الوفاء به) ومساهمة

كل نشاط في الربح (أو التكلفة) تكون متناسبة مع قيمة المتغير القراري المقابل، فعلى سبيل المثال إذا تضاعف عدد الوحدات المنتجة من منتج معين تتضاعف كمية الموارد اللازمة لإنتاجه وكذلك يتضاعف الربح الإجمالي المتحقق من هذا المنتج. ويلاحظ أنه يمكن تقريب العلاقات غير الخطية في مواقف معينة إلى علاقات خطية وذلك لتطبيق هذا الأسلوب، فإذا كان من الصعب ذلك يستخدم أسلوب آخر لدراستها هو أسلوب البرمجة غير الخطية.

فرض إمكانية الإضافة

ويعني هذا الفرض أن الكمية الإجمالية المستخدمة من كل مورد لإنتاج المنتجات محل الدراسة تساوي مجموع كميات هذا المورد المستخدمة في إنتاج هذه المنتجات وأن الربح الإجمالي المتحقق من الأنشطة يساوي مجموع الأرباح المتحقق من هذه الأنشطة، وهذا الفرض يتحقق أيضا من فرض التناسب الذي يتضمن أن معدل الربح (أو استخدام الموارد) لأي نشاط يبقى ثابتا إذا تغير مستوى هذا النشاط، وأن التغيرات في مستوى نشاط معين لا تؤثر على معدلات الربح (أو استخدام الموارد) لأي نشاط آخر.

فرض قابلية التجزئة

عند حل البرنامج الخطي يمكن أن يأخذ مستوى النشاط أي قيمة بين الصفر والحد الأقصى الذي تسمح به ظروف الموقف محل الدراسة وذلك لأن المتغير القراري متغير مستمر continuous variable ولا يوجد في الصياغة الرياضية للنموذج ما يمنع أن تكون قيمة أو أكثر من قيم الحل الأمثل في صورة كسرية. وفي الحياة العملية نجد أن المتغير القراري يمكن أن يأخذ صورة كسرية مثل الكمية المنتجة (أو المشتراة) من منتج معين، ولكن في حالات معينة نجد أنه من الضروري أن تكون قيمة بعض المتغيرات القرارية أو كلها في صورة غير كسرية مثل الأشخاص المعينين لأداء عمل معين، ويمكن دراسة هذه المواقف باستخدام أسلوب البرمجة الرقمية.

فرض التأكد

البـرنامج الخطي الذي ندرسـه في هذا المقـرر هو نموذج مـحـدد deterministic وذلك يعني أن مؤشراته تكون معروفة ومحددة أي لا تتغير نتيجة لعوامل الصدفة أو الاختيار ، وفي الحياة العملية تكون هذه المؤشرات عرضة للتغير ، فقد يتغير مثلا معدل ربح المنتجات محل الدراسة نتيجة تغير تكلفة المواد الداخلة في العملية الإنتاجية أو تغير سعر المنتج أو قد تتغير كمية الموارد المتاحة نتيجة نقص أو تأخير وصول بعض المواد الأولية ، وفي هذه الحالة يكون من الضروري التعرف على مدى تأثر الحل الأمثل بالنسبة للتغير في أحد هذه المؤشرات وسنبين ذلك بالتفصيل في الفصل الرابع ، وإذا تم التعرف على التوزيع الاحتمالي لمؤشر أو أكثر من مؤشرات النموذج لموقف معين فإنه يمكن دراسة هذا الموقف باستخدام البرمجة العشوائية .

الفصل الثاني

حل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية

● مقدمة ● الطريقة البيانية ● بعض الحالات الخاصة للبرنامج الخطي
● تطبيقات

مقدمة

قبل عرض طرق حل البرنامج الخطي سنتناول بعض المفاهيم التي يعتمد عليها هذا الحل، ولتسهيل ذلك سنعيد صياغة البرنامج الخطي في الصورة العامة بدلالة المصفوفات كالتالي:

ما هي قيمة المتجه X الذي يعظم الدالة:

$$\max Z = CX$$

طبقا للشروط الآتية:

$$AX \leq b \ , \ X \geq 0$$

حيث

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} ,$$

الفصل الثاني

حل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية

● مقدمة ● الطريقة البيانية ● بعض الحالات الخاصة للبرنامج الخطي
● تطبيقات

مقدمة

قبل عرض طرق حل البرنامج الخطي سنتناول بعض المفاهيم التي يعتمد عليها هذا الحل، ولتسهيل ذلك سنعيد صياغة البرنامج الخطي في الصورة العامة بدلالة المصفوفات كالتالي :

ما هي قيمة المتجه X الذي يعظم الدالة :

$$\max Z = CX$$

طبقا للشروط الآتية :

$$AX \leq b \ , \ X \geq 0$$

حيث

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} ,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة القيد الهيكلي رقم i في الصورة :

$$A_i X \le b_i$$

$$i = 1, 2, ..., m$$

حيث A_i تمثل الصف رقم i في المصفوفة A

و b_i تمثل العنصر رقم i في المتجه b

وبصفة عامة نجد أن كل قيد هيكلي :

$$A_i X \le b_i \ , i = 1, 2, ..., m$$

يقابل نصف فراغ مغلق a closed half-space في E^n حيث E^n تشير للإحداثيات التي تقابل المتغيرات القرارية وهو مجموعة النقاط التي تقع في الجانب الممكن من حدود السطح hyperplane المعرف كالتالي :

$$\left[X \in E^n / A_i \ \ X \ = \ b_i\right]$$

كما نجد أن تقاطع الجوانب الممكنة للقيود الهيكلية أي تقاطع أنصاف الفراغ المغلق في E^n يكون مجموعة محدبة متعددة السطوح a convex polyhedral set .

وكل قيد من قيود اللاسالبية :

$$X_j \le b_i \ , j = 1, 2, ..., n$$

يكون نصف فراغ مغلق ويمثل تقاطعها الجزء الموجب من E^n .

والقيود الهيكلية والقيود اللاسالبية المعرفة كالتالي :

$$\left[X \in E^n / AX \ \le \ b \ , \ X \ \ge \ 0\right]$$

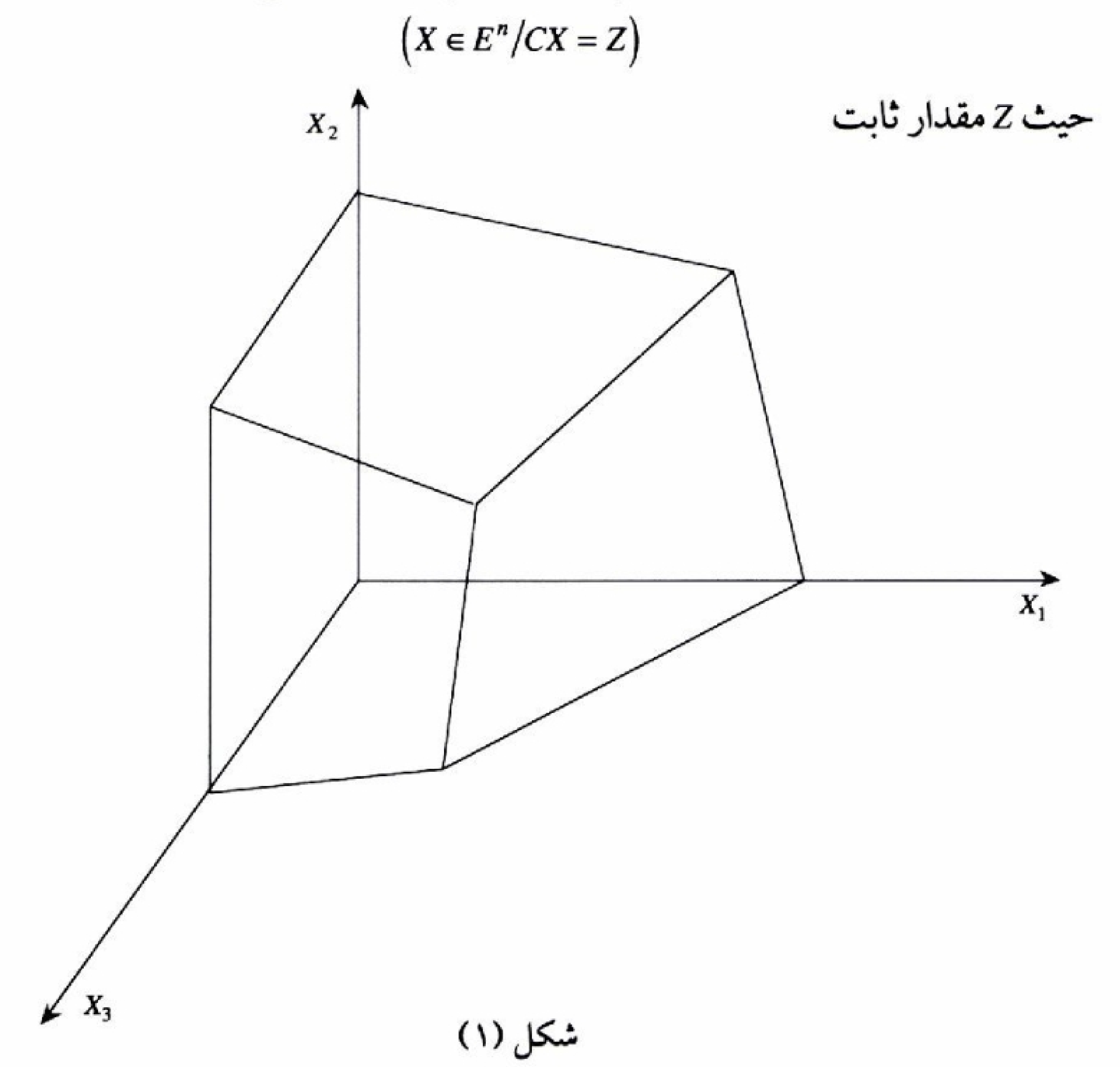
تكون منطقة الحلول الممكنة feasible solution region وهي مجموعة محدبة متعددة السطوح في الجزء الموجب من E^n ، ويتكون كل سطح من هذه السطوح من جميع النقط التي تحقق المعادلة المقابلة لأحد القيود الهيكلية أو أحد قيود اللاسالبية، ونقط تقابل السطوح أي النقط المتطرفة extreme points هي النقط التي تحقق المعادلات المقابلة للقيود.

ويمثل المنشور في شكل (١) منطقة الحلول الممكنة إذا كان لدينا ثلاثة متغيرات قرارية وثلاثة قيود وهو يتكون من ستة سطوح وثمان نقاط متطرفة، وعند كل نقطة متطرفة يتقابل ثلاثة سطوح وترتبط النقط المتطرفة مع بعضها باثني عشرة حافة يتقاطع عند كل منها سطحان.

وتمثل معادلة دالة الهدف قيم المتجه X التي تحقق السطح :

$$\left(X \in E^n / CX = Z\right)$$

حيث Z مقدار ثابت



شكل (١)

وبتغيير قيم Z يمكن تكوين سطوح موازية لنفسها في اتجاه تحسين قيمة دالة الهدف.

وقد وجد أنه إذا كانت المنطقة الممكنة للحل غير خالية nonempty وكانت دالة الهدف محددة bounded فإن دالة الهدف تحقق نهايتها العظمى عند نقطة متطرفة في حالة وجود حل أمثل واحد للبرنامج وعند نقطتين متطرفتين أو أكثر في حالة وجود حلول مثلى متعددة.

وبناء على المفاهيم السابقة تنقسم حلول البرنامج الخطي بصفة عامة إلى ثلاثة أنواع:

١ - الحلول الممكنة Feasible solutions

وهي قيم المتغيرات القرارية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ التي تحقق القيود الهيكلية وشرط اللاسالبية (إن وجد). وتعرف المنطقة التي تمثل هذه المتغيرات بمنطقة الحلول الممكنة.

٢ - الحلول الأساسية الممكنة Basic feasible solutions

وهي قيم المتغيرات التي تقابل الأركان corners أو النقط المتطرفة في منطقة الحلول الممكنة.

٣ - الحل الأمثل Optimal solution

وهو الحل أو الحلول الأساسية الممكنة التي تحقق دالة الهدف.

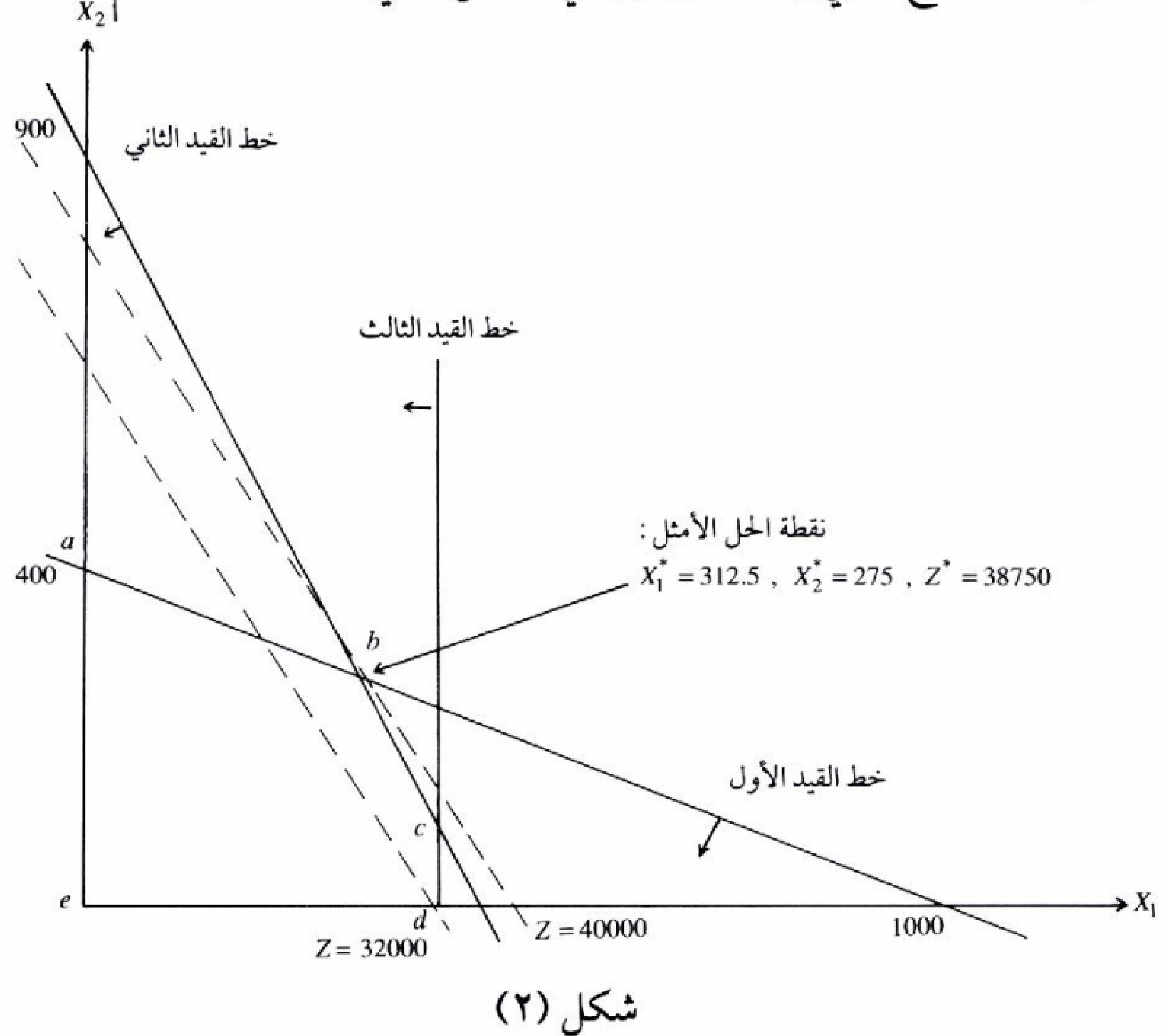
ولبيان هذه الأنواع من الحلول سنقدم أولا الطريقة البيانية وهي مقصورة على حل البرامج التي تتضمن متغيرين اثنين فقط، ثم نعرض طريقة السمبلكس The simplex method وهي تعتبر الطريقة الأساسية والعامة لحل المشاكل العملية للبرمجة الخطية، وقد ساعد على انتشار تطبيق هذه الطريقة قدرتها على إيجاد حل البرامج التي تتضمن عددا كبيرا من المتغيرات باستخدام الحاسب الآلي. ويلاحظ أن هناك مشكلات مثل مشكلة النقل ومشكلة التعيين تسمح طبيعتها باستخدام طرق أسرع وأبسط من طريقة السمبلكس. وسوف نتناول طريقة السمبلكس في الفصل الثالث وطريقة النقل وطريقة التعيين في الفصل الخامس.

الطريقة البيانية Graphic Method

هذه الطريقة مقصورة على معالجة البرامج التي تحتوي على متغيرين فقط ، ولكنها مفيدة في بيان طبيعة حل البرنامج الخطي بصفة عامة . و سنعرض أولا مثالين مختلفين ، دالة الهدف في المثال الأول في صورة تعظيم وفي المثال الثاني في صورة تصغير ، ثم نقدم بعض الحالات الخاصة التي تقابلنا عند حل البرنامج الخطي وذلك في ضوء الحل البياني .

مثال ١

سنعتبر المشكلة الإنتاجية البسيطة في مثال ١ في الفصل السابق ونمثل البرنامج المقابل لهذه المشكلة على محورين أحدهما لعدد وحدات المنتج الأول X_1 ، والآخر لعدد وحدات المنتج الثاني X_2 كما هو مبين في الشكل الآتي :



شكل (٢)

تمثل نقطة الأصل $X_1 = 0, X_2 = 0$ وتمثل أي نقطة في المستوى (في الربع الموجب حيث إن $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$) تكوينة من إنتاج المنتجين. ولتمثيل القيد الأول بيانيا سنعيد كتابته في صورة معادلة كالتالي:

$$2X_1 + 5X_2 = 2000$$

تمثل جميع النقط التي تقع على هذا الخط التكوينات الممكنة من المنتج الأول والثاني التي تستهلك الكمية المتاحة من المورد الأول. وحيث إنه يمكن تمثيل الخط بنقطتين، فإن أسهل النقط التي يمكن إيجادها هي نقطتا تقاطع هذا الخط مع المحور الأفقي X_1 والمحور الرأسي X_2. ولإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور الأفقي X_1 نضع $X_2 = 0$ في المعادلة فنجد أن:

$$2X_1 = 2000$$

$$\therefore X_1 = 1000$$

ولإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور الرأسي نضع $X_1 = 0$ فنجد أن:

$$5X_2 = 2000$$

$$\therefore X_2 = 400$$

ولإيجاد الجانب الممكن للقيد valid side، سنأخذ نقطة لا تقع على الخط الممثل للقيد، فإذا حققت هذه النقطة القيد فإن جميع النقط التي تقع في الجانب نفسه تحققه، وإذا لم تحقق القيد فإن جميع النقط التي تقع على الجانب الآخر للخط هي التي تحققه. نضع $X_1 = 0, X_2 = 0$ ونعوض في المتباينة التي تمثل القيد الأول، فنجد أن $0 \leq 2000$، ويعني ذلك أن اتجاه المنطقة الممكنة لهذا القيد هو نقطة الأصل. وبالمثل، لتمثيل القيد الثاني بيانيا نعيد كتابته في صورة معادلة كالتالي:

$$4X_1 + 2X_2 = 1800$$

نحدد نقطة تقاطع هذا الخط مع محور X_1 بوضع $X_2 = 0$ فنجد أن:

$$4X_1 = 1800$$

$$\therefore X_1 = 450$$

ونحدد نقطة تقاطع هذا الخط مع محور X_2 بوضع $X_1 = 0$ فنجد أن :

$$2X_2 = 1800$$

$$\therefore X_2 = 900$$

ولتحديد المنطقة المقبولة للمتباينة الثانية نضع $X_1 = X_2 = 0$ فيها ، فنجد أن $0 \leq 1800$ أي أن المنطقة المقبولة لهذه المتباينة تقع في اتجاه نقطة الأصل .

وبالمثل ، نجد أن خط القيد الثالث يقطع محور X_1 في 400 وأن الجانب الممكن له يقع أيضا في اتجاه نقطة الأصل .

تعرف أي خطة إنتاجية تحقق القيود الثلاثة محل الدراسة بالحل الممكن ، وتقابل الحلول الممكنة النقط التي تقع على الجوانب الممكنة للقيود الثلاثة داخل المنطقة الممكنة للحل في الشكل السابق . يمثل الشكل a b c d e منطقة الحلول الممكنة ، وتمثل الأركان a, b, c, d, e الحلول الأساسية الممكنة .

ولإيجاد الحل الأمثل نأخذ دالة الهدف وهي :

$$Z = 80X_1 + 50X_2$$

وحيث إن Z غير معروفة ، فإنه يمكن افتراض عدة قيم لها ، فإذا افترضنا أن $Z = 40000$ فإن دالة الهدف تكون :

$$40,000 = 80X_1 + 50X_2$$

ويتقاطع هذا الخط مع محور X_1 في النقطة 500 ، ومع محور X_2 في النقطة 800 (وقد اخترنا $Z = 40000$ لأنها تقبل القسمة على كل من معامل X_1 و X_2) ، وسنفترض مرة أخرى أن $Z = 32000$ ، ونحصل على خط مواز للخط الأول ويقابل محور X_1 في 400 ومحور X_2 في 640 ، فإذا تصورنا خطوطا مختلفة موازية لهذين الخطين في اتجاه تحسين دالة الهدف ، فإن نقطة تماس أعلى خط مع ركن أو نقطة متطرفة من منطقة الحلول الممكنة تمثل الحل الأمثل . ومن الرسم السابق نجد أن نقطة الحل الأمثل هي نقطة تقاطع الخطين المقابلين للقيدين الأول والثاني ويمكن الحصول على هذه النقطة بحل المعادلتين الآتيتين آنيا :

$$2X_1 + 5X_2 = 2000$$

$$4X_1 + 2X_2 = 1800$$

ونجد أن :

$$X_1^* = 312.5 \text{ و } X_2^* = 275$$

وبالتعويض في دالة الهدف نجد أن قيمة دالة الهدف هي :

$$(80)\ (312.5) + (50)\ (275) = 38750$$

ويعني ذلك أن الحل الأمثل يشير إلى إنتاج 312.5 وحدة من المنتج الأول و 275 وحدة من المنتج الثاني وأن الربح المقابل هو 38750 .

مثال ٢

يلاحظ أن المثال السابق يهتم بتعظيم دالة الهدف وأن القيود الهيكلية في صورة أقل من أو يساوي، وسوف نعرض الحل البياني للمثال٢ في الفصل السابق حيث نجد أن دالة الهدف مطلوب تصغيرها وأن القيود الهيكلية في صورة أكبر من أو يساوي وأقل من أو يساوي .

نعيد أولا كتابة القيود الهيكلية في صورة معادلات كالتالي :

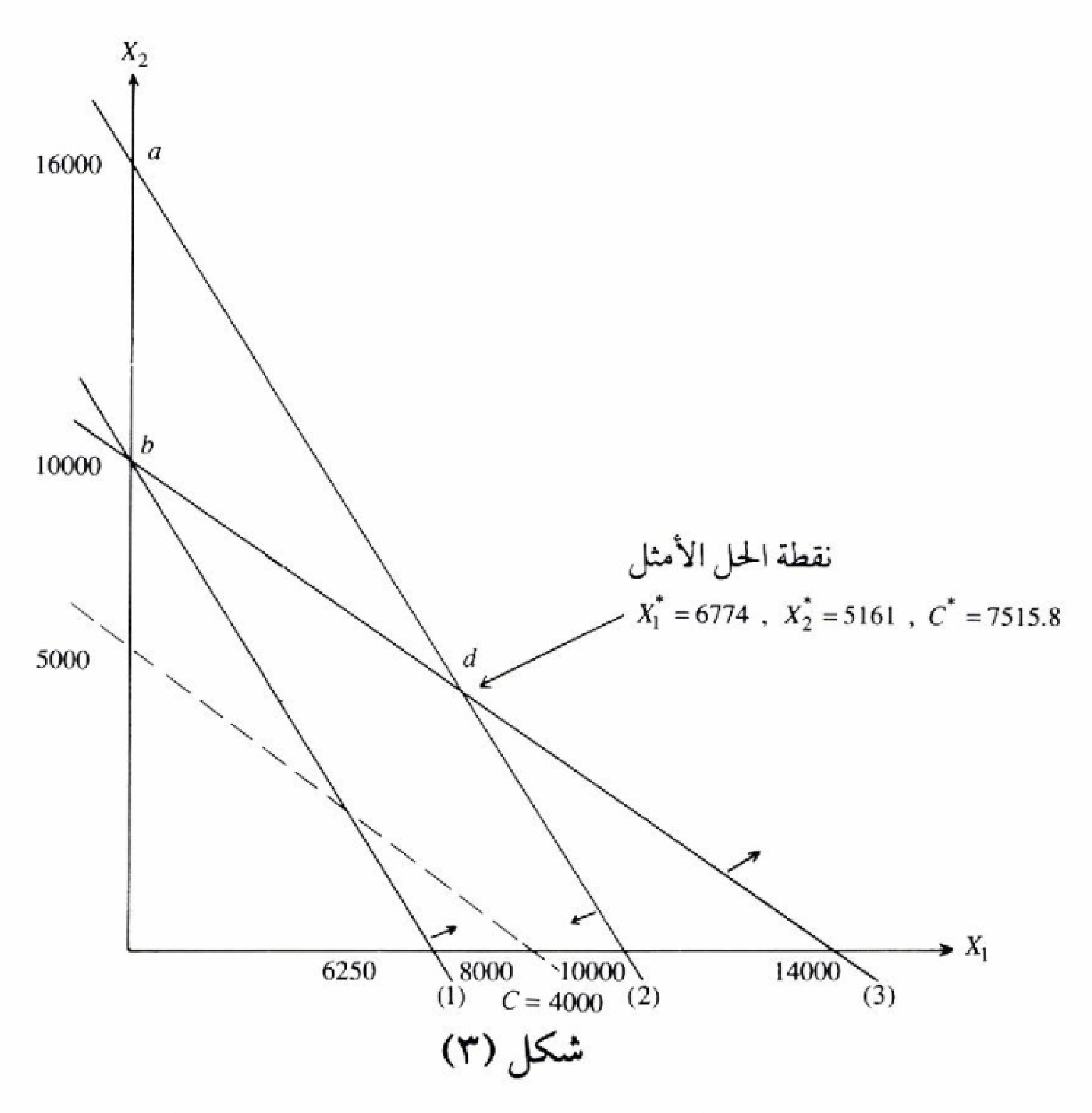
$$0.08X_1 + 0.05X_2 = 500$$

$$0.10X_1 + 0.14X_2 = 1400$$

$$0.16X_1 + 0.10X_2 = 1600$$

سنفترض أن المحور الأفقي يمثل X_1 وأن المحور الرأسي يمثل X_2 كما في شكل (٣) ولرسم الخط المقابل للقيد الأول نضع $X_2 = 0$ فنجد أنه يتقاطع مع X_1 في النقطة 6250 ونضع $X_2 = 0$ فنجد أنه يتقاطع مع X_2 في النقطة 10000 ، ولتحديد المنطقة الممكنة للقيد الأول نضع $X_2 = 0$ و $X_1 = 0$ في المتباينة الأولى فنجد أن $500 \geq 0$ ، ويعني ذلك أن المنطقة الممكنة لهذا القيد عكس اتجاه نقطة الأصل .

ولرسم الخط المقابل للقيد الثاني نجد أنه يقطع محور X_1 في 14000 ويقطع محور X_2 في 10000 والمنطقة الممكنة للقيد الثاني عكس اتجاه نقطة الأصل كما في القيد الأول .



شكل (٣)

والخط المقابل للقيد الثالث يقطع محور X_1 في 10000 ويقطع محور X_2 في 16000 ، والمنطقة الممكنة للقيد الثالث في اتجاه نقطة الأصل .

ولتمثيل دالة الهدف بيانيا نضع $C = 4000$ فنحصل على

$$4000 = 0.5X_1 + 0.8X_2$$

والخط الممثل لهذه الدالة يقطع محور X_1 في 8000 ومحور X_2 في 5000 .

وكما في المثال السابق نجد أن المنطقة الممكنة للحل هي المنطقة المحدودة بالأركان a, b, d وأن نقطة الحل الأمثل هي النقطة d الناتجة من تقاطع الخطين الممثلين للقيدين الثاني والثالث وإحداثي هذه النقطة يمكن إيجادها بدقة من حل المعادلتين :

$$0.10X_1 + 0.14X_2 = 1400$$

$$0.16X_1 + 0.10X_2 = 1600$$

ونحصل على :

$$X_1^* = 6774 \text{ و } X_2^* = 5161$$

وبالتعويض في دالة الهدف نحصل على :

$$(0.5)\ (6774) + (0.8)\ (5161) = 7515.8$$

مثال ٣

سنفترض في مثال ١ في الفصل السابق أنه من المطلوب أن يكون إنتاج المنتج الأول ضعف إنتاج المنتج الثاني على الأقل، ويمكن التعبير عن ذلك في صورة قيد رابع للمشكلة كالتالي :

$$X_1 \geq 2X_2$$

أي أن :

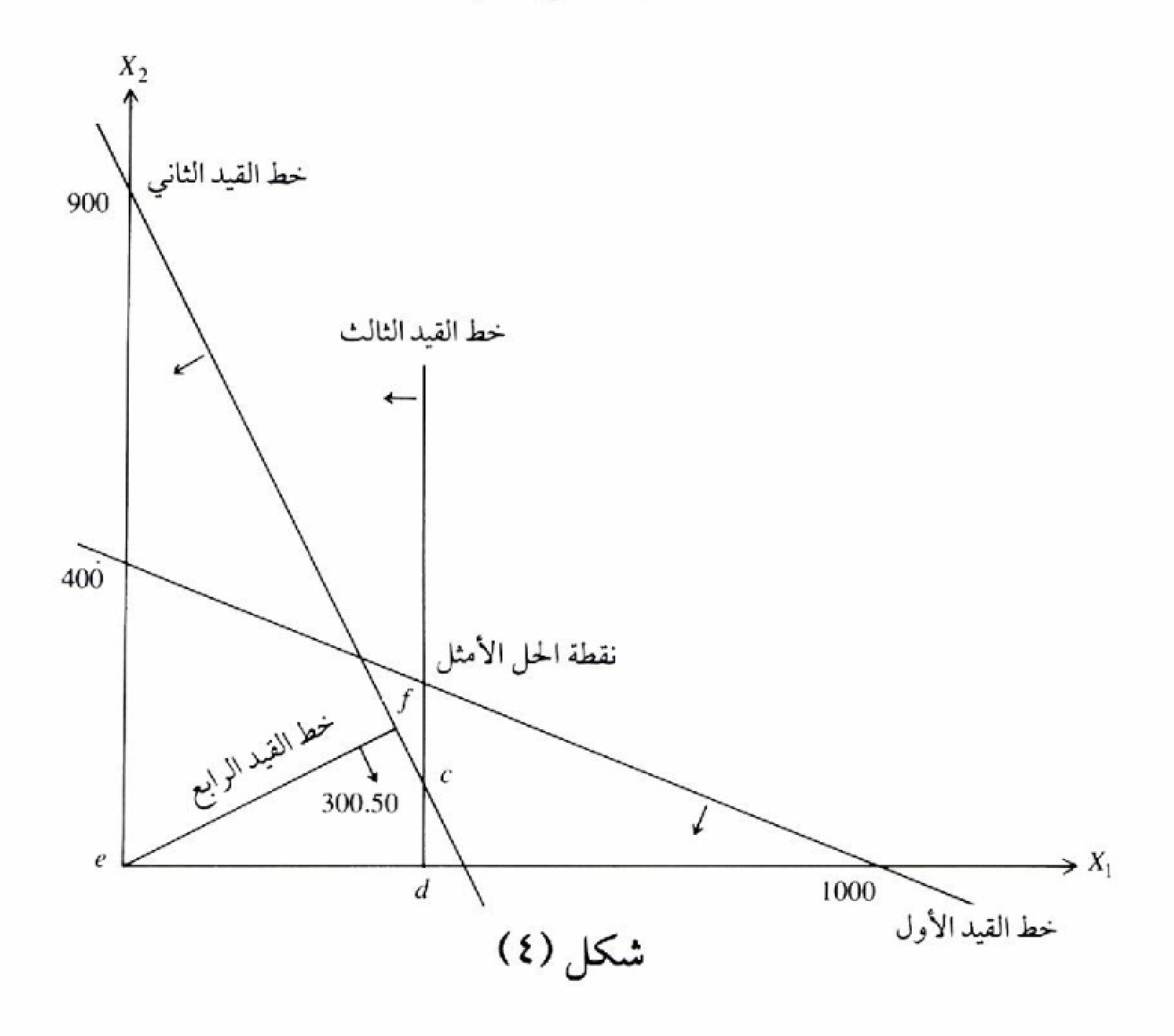
$$X_1 - 2X_2 \geq 0$$

والمعادلة المقابلة لهذا القيد هي :

$$X_1 - 2X_2 = 0$$

ولتمثيل هذه المعادلة بيانيا، نضع $X_2 = 100$ فنجد أن $X_1 = 200$ أي أن الخط الممثل لهذه المعادلة يمر بالنقطتين (0,0)، (200, 100)، ولإيجاد الجانب الممكن لهذا الخط نختبر النقطة (300, 50)، وبالتعويض في المتباينة نجد أنها تحققها، ويعني ذلك أن الجانب الممكن لهذا القيد في اتجاه هذه النقطة كما في شكل (٤).

وتكون المنطقة الممكنة للحل هي المنطقة المحددة بالأركان $f,\ c,\ d,\ e$.



شكل (٤)

يلاحظ أن المنطقة الممكنة للحل الناتجة بعد إضافة القيد الرابع أصغر من قبل، فالقيود الإضافية تقلل عادة من المنطقة الممكنة للحل وفي الشكل السابق نجد أن الحل الأمثل للبرنامج الجديد يتحدد بتقاطع خط القيد الثاني مع خط القيد الرابع، وبحل المعادلتين المقابلتين لهذين القيدين نحصل على :

$$X_1^* = 360 \text{ و } X_2^* = 180$$

وقيمة دالة الهدف تساوي :

$$(80)(360) + (50)(180) = 37800$$

يلاحظ أن جميع القيود الهيكلية في الأمثلة السابقة كانت في صورة متباينات، والنقط الممكنة لهذه المتباينات تقع كما رأينا في جانب أو آخر من الخط المقابل للقيد ولكن هناك مشكلات تكون فيها بعض القيود أو كلها في صورة

معادلات، فإذا فرضنا على سبيل المثال أن المطلوب في المثال السابق أن يكون إنتاج المنتج الأول ضعف إنتاج المنتج الثاني بالضبط، ونعبر عن ذلك بالمعادلة الآتية:

$$X_1 = 2X_2$$

فإن النقط الممكنة للبرنامج تقع بالضبط على هذا الخط وداخل المنطقة الممكنة للقيود الثلاثة الأولى، ويلاحظ أن نقطة الحل الأمثل في المثال محل الدراسة لا تتغير عند تحويل القيد الرابع من متباينة إلى معادلة.

بعض الحالات الخاصة للبرنامج الخطي

تقابلنا عند حل البرنامج الخطي بعض الحالات الخاصة التي سنتعرف عليها أولا باستخدام الحل البياني وذلك لمعرفة طبيعتها وسنتناولها مرة أخرى باستخدام طريقة السمبلكس بعد عرض هذه الطريقة في الفصل التالي.

١ – عدم وجود منطقة ممكنة للحل No feasible solution

تنشأ هذه الحالة نتيجة عدم وجود نقطة معينة تحقق جميع القيود الهيكلية في آن واحد، فإذا حدث ذلك فإنه يجب إعادة دراسة صياغة المشكلة والنظر فيما إذا كان بعض القيود في حاجة إلى تعديل، وقد يتطلب ذلك في بعض الحالات زيادة بعض الموارد المتاحة كزيادة الميزانية أو ساعات عمل الآلات... الخ.

مثال ٤

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\max Z = 3X_1 + 4X_2$$

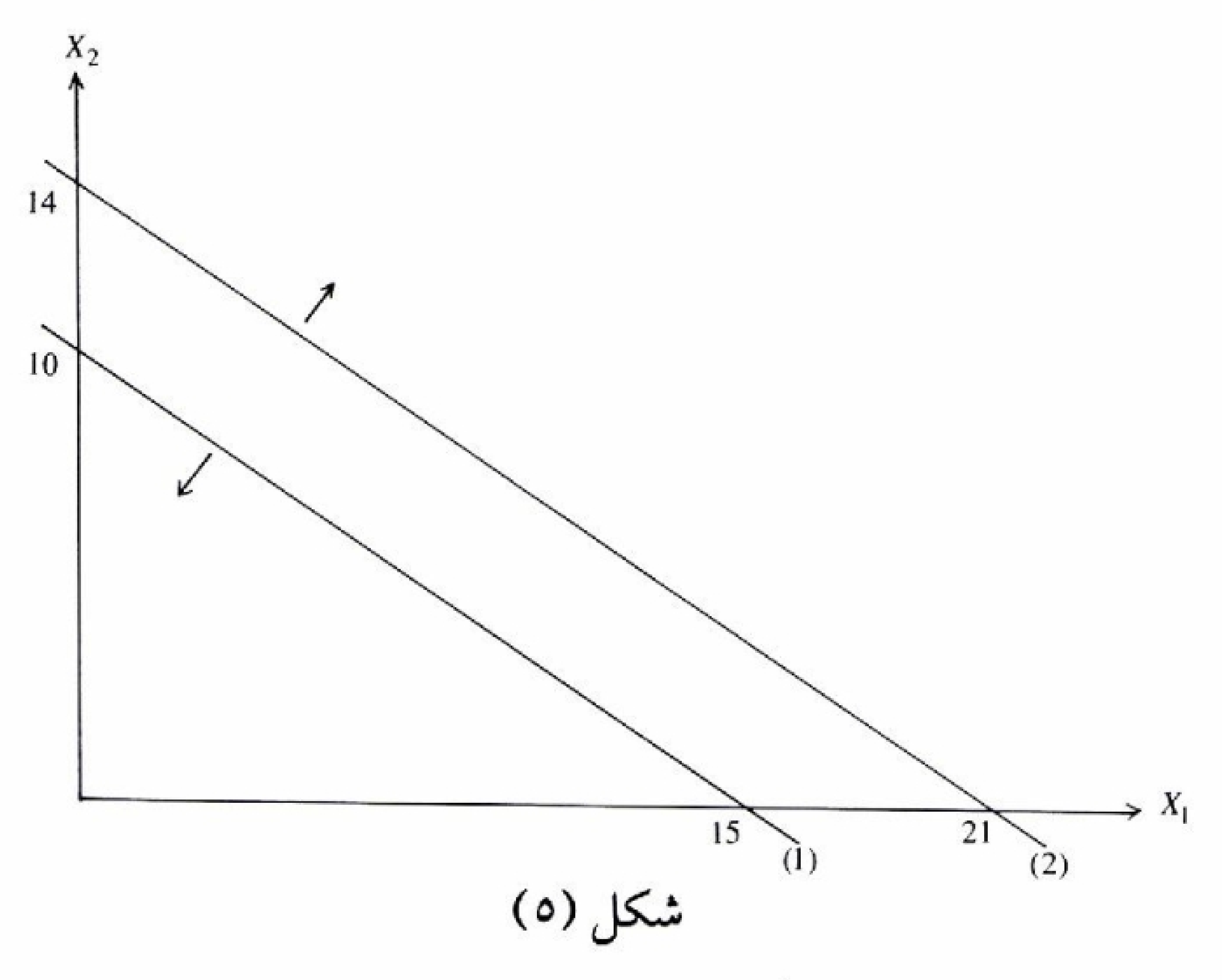
طبقا للشروط الآتية:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 42$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

ويكون التمثيل البياني للبرنامج السابق كالتالي:



شكل (٥)

ويتضح منه عدم وجود أي نقطة (X_1 , X_2) تحقق القيدين الهيكليين معا .

٢ – دالة الهدف غير محدودة Unbounded objective function

قد نجد أن هناك منطقة ممكنة للحل ولكن دالة الهدف تزيد بدون حد عندما يكون من المطلوب تعظيمها ، ويشير ذلك إلى أن صياغة البرنامج خاطئة ، فعلى سبيل المثال إذا كانت دالة الهدف تقابل ربحا فإنه ليس من المنطقي أن يكون هذا الربح لا نهائيا ، وقد يرجع ذلك إلى إسقاط قيد أو أكثر من القيود المهمة للبرنامج .

مثال ٥

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 2X_1 + 2X_2$$

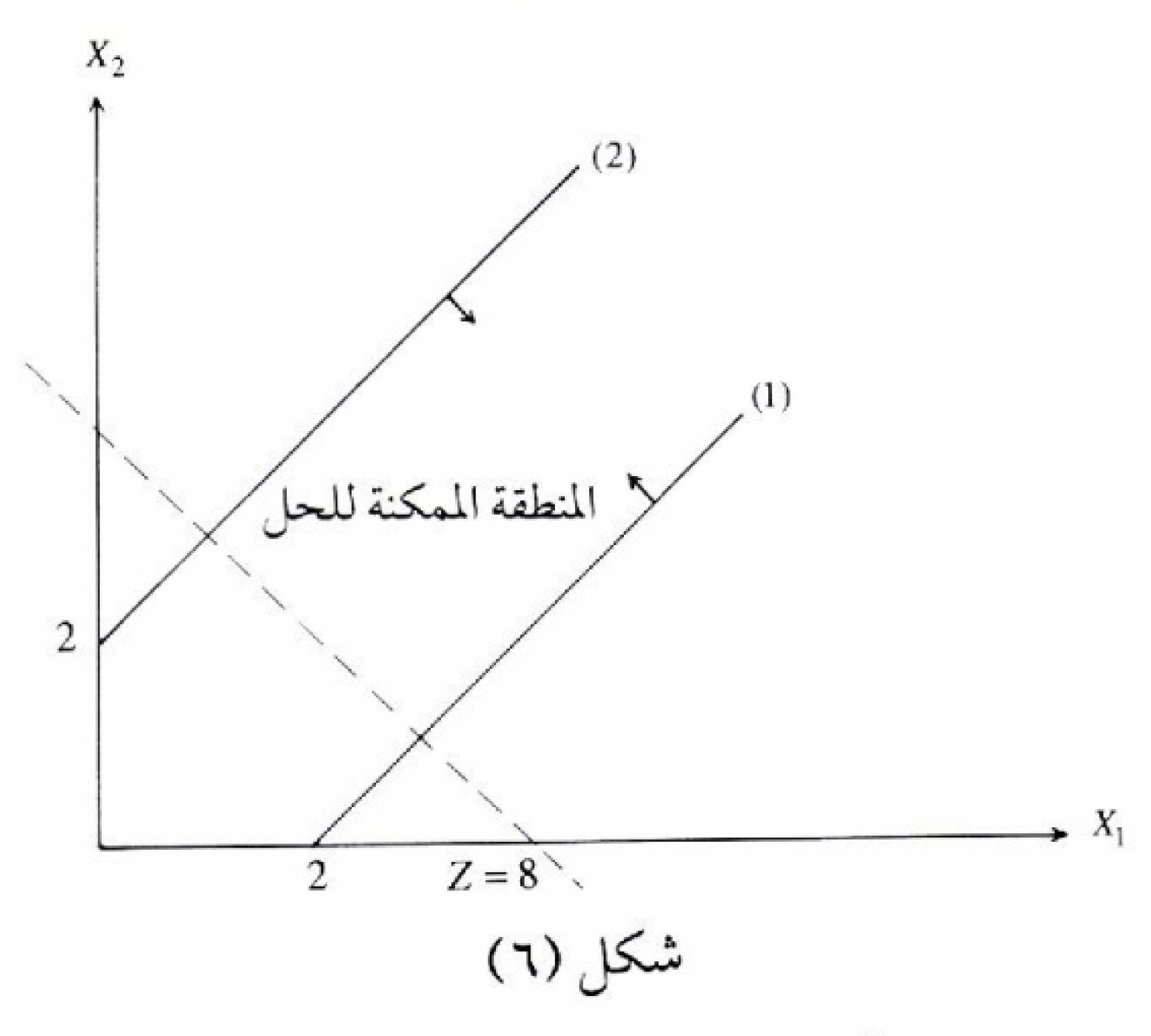
طبقا للشروط الآتية :

$$2X_1 - 2X_2 \leq 4$$

$$-2X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يكون التمثيل البياني للبرنامج السابق كما في الشكل الآتي :



شكل (٦)

ويتضح من الشكل السابق أنه يمكن زيادة دالة الهدف بدون حد .

٣- وجود حلول مثلي متعددة Multiple optimal solutions

يكون للبرنامج الخطي حلولا مثلى متعددة إذا وازى الخط الممثل لدالة الهدف الخط الممثل لأحد القيود الهيكلية التي تشترك في تحديد نقطة الحل الأمثل .

مثال ٦

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = X_1 + 2X_2$$

طبقا للشروط الآتية :

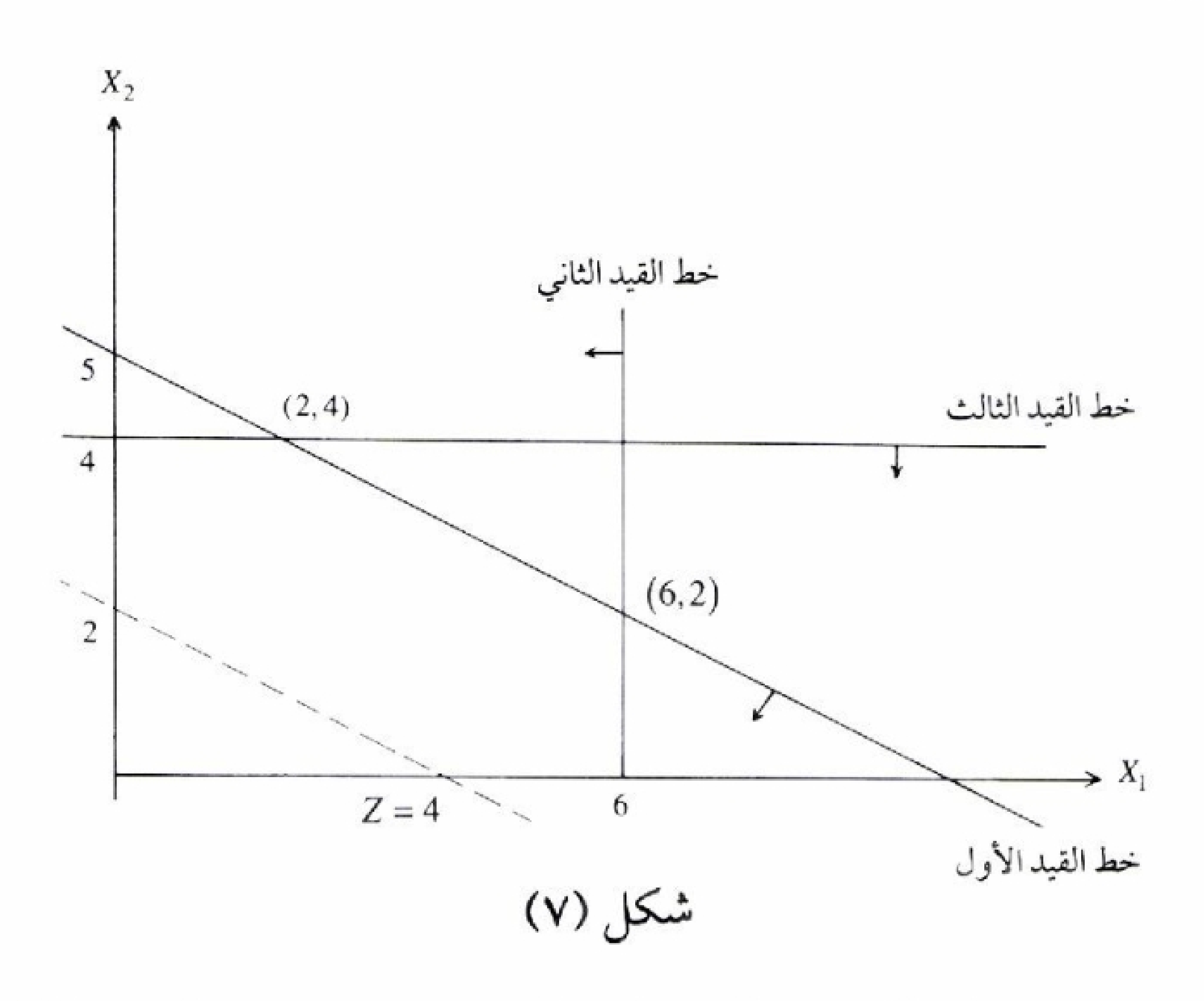
$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 \leq 6$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يكون التمثيل البياني للبرنامج السابق كما في شكل (٧) حيث يلاحظ أنه عند تحريك الخط الممثل لدالة الهدف عند $Z = 4$ بحيث يكون موازيا لنفسه إلى أعلى فإنه يتطابق مع الخط الواصل بين تقاطع الخطين المقابلين للقيدين الأول والثاني وتقاطع الخطين المقابلين للقيدين الأول والثالث، أي الخط الواصل بين النقطتين (6, 2)، (2, 4) كما هو مبين في شكل (٧)، وذلك لأن الخط الممثل للقيد الأول يوازي الخط الممثل لدالة الهدف.



شكل (٧)

وينتج من ذلك أن كل نقطة من النقطتين (6, 2)، (2, 4) تعطي حلا أمثل للبرنامج المدروس، كما أن جميع النقط على الخط الواصل بين هاتين النقطتين تعطي حلولا مثلى أخرى، وكل نقطة على هذا الخط يمكن كتابتها في صورة تكوينة من النقطتين كالتالي :

$$\lambda\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

حيث

$$0<\lambda<1$$

فإذا وضعنا على سبيل المثال $\lambda = \frac{1}{2}$ ، فإن الحل الأمثل الناتج يكون :

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

وقيمة دالة الهدف المقابلة لجميع الحلول المثلى متساوية وتساوي 10 .

ويلاحظ في حالة البرامج التي يوجد لها حلول مثلى متعددة أنه يكون لدى متخذ القرار مرونة لاختيار الحل المناسب وفقا للعوامل الأخرى التي لم تتم صياغتها في البرنامج صياغة كمية .

تطبيقات

١ - سنفترض أن لدى مؤسسة وطنية مصنعين وثلاثة مراكز توزيع ، تبلغ الطاقة الإنتاجية للمصنع الأول 150 ، وللثاني 300، وتبلغ الطاقة الاستيعابية لمركز التوزيع الأول 150 وللثاني 200 وللثالث 100 . ويقدر معدل تكلفة النقل من المصنع الأول إلى مركز التوزيع الأول 5، وإلى مركز التوزيع الثاني 6، وإلى مركز التوزيع الثالث 5 ، ومن المصنع الثاني إلى مركز التوزيع الأول 6، وإلى مركز التوزيع الثاني 8 وإلى مركز التوزيع الثالث 5؛ والمطلوب :

ا) إعداد جدول النقل .

ب) صياغة البرنامج الخطي .

٢ - لتكوين وجبة غذائية من ثلاثة أطعمة A, B, C مع الأخذ في الاعتبار نوعين من المادة الغذائية N_1 ، N_2 ، وجد أن كمية N_1 المستخلصة من الكيلوجرام من A هي 0.1 وحدة، ومن B هي 0.14 وحدة، ومن C هي 0.04 وحدة، وكمية N_2 المستخلصة من الكيلوجرام من A هي 0.16 وحدة، ومن B هي 0.11 وحدة، ومن C هي 0.06 وحدة، بحيث تحتوي الوجبة على الأقل على 600 وحدة من N_1 ، ولا تزيد وحدات N_2 في الوجبة عن 900 وحدة، وتكلفة الكيلوجرام من A هي 5 ريال، ومن B هي 7 ريال، ومن C هي 9 ريال .
والمطلوب صياغة البرنامج الخطي المقابل .

٣ - سنفترض أنه من المطلوب شراء كمية معينة من لحوم الغنم والدجاج والبقر بأقل تكلفة بحيث تحتوي على الأقل على 6 كيلوجرام بروتين وبحيث لا تزيد كمية الدهن عن 15 كيلوجرام، ولا تقل كمية الغنم عن 5 كيلوجرام، ولا تزيد كمية الماء عن 32 كيلوجرام، وكانت نسبة وجود المادة الغذائية في الكيلوجرام الواحد من كل نوع كما في الجدول الآتي :

المادة الغذائية	غنم	دجاج	بقر
البروتين	0.15	0.15	0.20
الدهن	0.25	0.15	0.20
الماء	0.60	0.70	0.60

وكان ثمن كيلوجرام الغنم 14 ريالا، والدجاج 10 ريالات، والبقر 20 ريالا، والمطلوب صياغة هذه المشكلة في صورة برنامج خطي .

٤ - تقوم إحدى الشركات بتجميع نوعين من المنتجات : الثلاجات وأجهزة التكييف، يمر كل نوع على مركزي تجميع، فإذا علمت أن ساعات العمل المتاحة أسبوعيا في المركز الأول 1800 ساعة، وفي المركز الثاني 2000 ساعة، وتحتاج الثلاجة إلى ساعتين بالمركز الأول وخمس ساعات بالمركز الثاني، ويحتاج جهاز التكييف إلى أربع ساعات بالمركز الأول وساعتين بالمركز الثاني، وكانت الطاقة الاستيعابية لسوق أجهزة التكييف لا تتجاوز 400 جهاز أسبوعيا ومعدل ربح الثلاجة 60 ريالا وجهاز التكييف 90 ريالا . والمطلوب صياغة المشكلة في صورة برنامج خطي ثم تحديد مزيج الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح .

٥ - تعاقدت إحدى المؤسسات الوطنية مع شركة أجنبية لتوفير مستلزمات إنتاج الفيديو والتلفزيون لتجميعهما محليا، وقامت المؤسسة بإنشاء مصنع تجميع

للأجهزة طاقة العمل الإنتاجية به 160 ساعة يوميا، ويحتاج الفيديو إلى خمس ساعات والتلفزيون إلى عشر ساعات، كما تستطيع وحدة التشطيب والاختبار الانتهاء من 24 جهازا يوميا (فيديو وتلفزيون) والتزمت الشركة الأجنبية بضمان توريد عشر شاشات تلفزيون يوميا ويبلغ ربح الفيديو 60 ريالا والتلفزيون 150 ريالا. والمطلوب صياغة البرنامج الخطي لهذه المشكلة ثم تحديد مزيج الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح.

الفصل الثالث

طريقة السمبلكس
The Simplex Method

● أساس طريقة السمبلكس وخطواتها ● معالجة القيود التي فى صورة أكبر من أو يساوي والتي في صورة معادلات ● بعض الحالات الخاصة للبرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس ● تطبيقات

أساس طريقة السمبلكس وخطواتها

رأينا في الباب السابق أن الطريقة البيانية لحل البرنامج الخطي قاصرة على حل البرنامج التي يوجد بها متغيران فقط، وتتميز طريقة السمبلكس التي سنعرضها في هذا الباب بقدرتها على حل البرامج التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات، ولشرح هذه الطريقة سنستعين بالمثال المبسط الآتي :

مثال١

سنفترض أن لدينا منتجين وموردين نادرين يدخلان في إنتاجهما، والكمية المتاحة من المورد الأول 160 وحدة ومن المورد الثاني 24 وحدة، ولإنتاج وحدة من المنتج الأول يلزم خمس وحدات من المورد الأول ووحدة من المورد الثاني، ولإنتاج وحدة من المنتج الثاني يلزم عشر وحدات من المورد الأول ووحدة من المورد الثاني، والمطلوب إيجاد الكميات المثلى من إنتاج كل منتج التي تحقق أقصى ربح إذا كان معدل ربح المنتج الأول 90 والمنتج الثاني 100 .

من ذلك تكون صياغة البرنامج الخطي كالتالي :

$$\max Z = 90X_1 + 100X_2$$

طبقا للشروط الآتية :

(1) المورد الأول $5X_1 + 10X_2 \leq 160$

(2) المورد الثاني $X_1 + X_2 \leq 24$

$$X_1 , \quad X_2 \geq 0$$

حيث X_1 تشير إلى كمية المنتج الأول وX_2 تشير إلى كمية المنتج الثاني .

يبين شكل (١) نقط الحلول الأساسية الممكنة أو النقط المتطرفة : ,③ ,② ,① ④ وكذلك نقطة تقاطع الخط المقابل للقيد الثاني مع محور X_2 وهي النقطة ⑤ ونقطة تقاطع الخط المقابل للقيد الأول مع محور X_1 وهي النقطة ⑥ . نضيف متغيرا إلى الطرف الأيسر من كل قيد من القيود الهيكلية للبرنامج لتحويله إلى معادلة ، ويعرف هذا المتغير بالمتغير الفائض slack variable ، فإذا افترضنا أن S_1 هو المتغير الفائض المقابل للقيد الأول وأن S_2 هو المتغير الفائض المقابل للقيد الثاني فإنه يمكن إعادة كتابة البرنامج السابق كالتالي :

$$\max Z = 90X_1 + 100X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

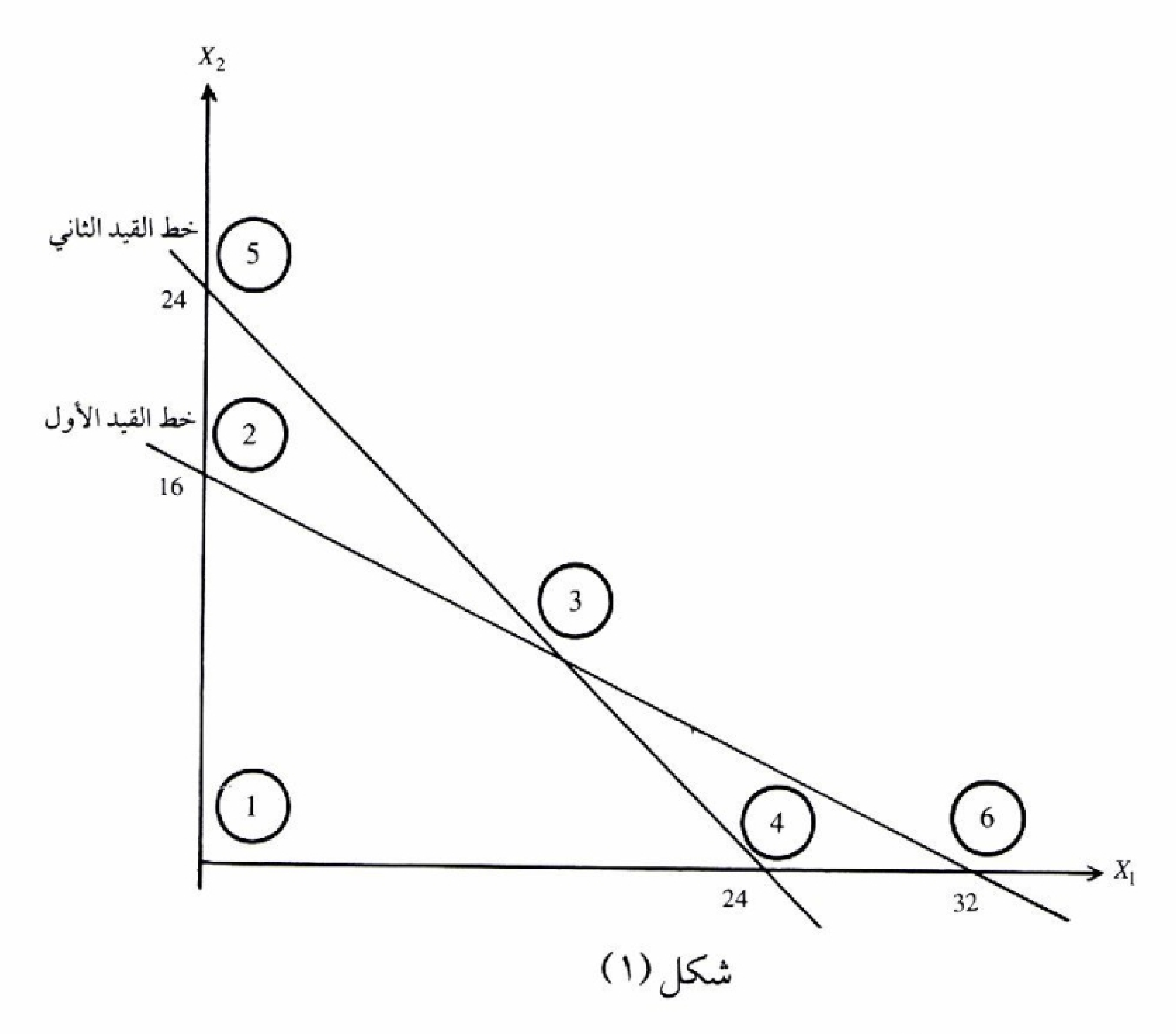
طبقا للشروط الآتية :

(3) $5X_1 + 10X_2 + S_1 = 160$

(4) $X_1 + X_2 + S_2 = 24$

وتشير S_1 في المثال محل الدراسة إلى المورد الأول غير المستخدم أو الفائض في المورد الأول ، وتشير S_2 إلى المورد الثاني غير المستخدم أو الفائض في المورد الثاني ، وحيث إن المورد غير المستخدم أو الفائض في المورد لا يساهم في الربح فإن معامل المتغير الفائض في دالة الهدف يساوي صفرا .

عند حل المعادلتين (4) ,(3) نجد أن عدد المتغيرات أربعة ، ويمكن حل هاتين المعادلتين عند كل ركن من الأركان الستة المشار إليها في شكل (١) حيث نجد قيمة متغيرين من المتغيرات الأربعة تساوي صفرا .



شكل (١)

ويبين الجدول الآتي قيم المتغيرات وقيمة دالة الهدف المقابلة لكل نقطة :

رقم الركن	المتغيرات التي تساوي صفرا	المتغيرات				قيمة دالة الهدف
		X_1	X_2	S_1	S_2	
1	X_1, X_2	0	0	160	24	0
2	X_1, S_1	0	16	0	8	1600
3	S_1, S_2	16	8	0	0	2240
4	S_1, X_2	24	0	40	0	2160
5	X_1, S_2	0	24	–80	0	حل غير ممكن
6	S_1, X_2	32	0	0	–8	حل غير ممكن

لبيان كيفية إيجاد القيم في الجدول السابق، نأخذ الركن ① وهو نقطة الأصل حيث إن $X_1 = 0$, $X_2 = 0$. وبالتعويض في المعادلتين نجد أن $S_1 = 160, S_2 = 24$. وبالتعويض في دالة الهدف نجد أن $Z = 0$، وعند الركن ② نجد أن $S_1 = 0$ لأن هذا الركن ناتج من تقاطع خط القيد الأول مع محور X_2، وأن $X_1 = 0$. وبالتعويض في المعادلتين نجد أن $X_2 = 16$, $S_2 = 8$، وبالتعويض في دالة الهدف نجد أن $Z = 1600$، والركن ③ ينتج من تقاطع خطي القيدين. وبالتالي فإن $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. وبالتعويض في المعادلتين نحصل على $X_1 = 16$, $X_2 = 8$، وبالتعويض في دالة الهدف نحصل على $Z = 2240$، والركن ④ ينتج من تقاطع خط القيد الثاني مع محور X_1. وعلى ذلك فإن $X_2 = 0$, $S_2 = 0$.

وبالتعويض في المعادلتين نحصل على $S_1 = 40$, $X_1 = 24$ وقيمة دالة الهدف المقابلة تساوي 2160، وعند الركن ⑤ نجد أن $X_1 = S_2 = 0$ وأن $X_2 = 24$ ولكن $S_1 = -80$ وذلك يتناقض مع شرط اللاسالبية لأن قيم المتغيرات يجب أن تكون غير سالبة وكذلك عند الركن ⑥ نجد أن $S_1 = X_2 = 0$ وأن $X_1 = 32$ ولكن $S_2 = -8$.

ومن الجدول السابق نجد أن أعلى قيمة لدالة الهدف تقابل الركن ③ والحل المقابل لهذا الركن هو الحل الأمثل وهو كالتالي:

$$X_1^* = 16 \;,\; X_2^* = 8 \;,\; S_1^* = 0 \;,\; S_2^* = 0 \;,\; Z^* = 2240$$

وبصفة عامة إذا كان لدينا قيود عددها m ومتغيرات عددها n فإن عدد النقط المطلوب اختبارها بالطريقة السابقة يساوي $(m + n)!/m!\, n!$، أي أن عدد النقط المطلوب اختبارها طبقا لهذه الطريقة كبير جدا.

تعرف الحلول المقابلة للأركان ④ ,③ ,② ,① في الجدول السابق بالحلول الأساسية الممكنة، وهي تقابل متغيرات غير سالبة، وتعرف الحلول المقابلة للأركان ⑥ ,⑤ بالحلول غير الممكنة وهي تقابل متغيرات قيم بعضها سالبة.

وعند كل حل أساسي ممكن يوجد نوعان من المتغيرات: متغيرات أساسية ومتغيرات غير أساسية. فمثلا عند الركن ① في المثال محل الدراسة يسمى كل من S_1 , S_2 متغيرا أساسيا ويسمى كل من X_1 , X_2 متغيرا غير أساسي وعند الركن ②

يسمى كل من S_2 , X_2 متغيرا أساسيا ، ويسمى كل من S_1 , X_1 متغيرا غير أساسي وبالمثل بالنسبة للركنين ③ و ④ .

وتعتمد طريقة السمبلكس على الانتقال من ركن حل أساسي ممكن إلى ركن حل أساسي ممكن آخر مع تحسين دالة الهدف وتقف عند النقطة التي تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف .

وبصفة عامة يمكن تلخيص خطوات طريقة السمبلكس فيما يلي :

١ - اختيار حل أساسي ممكن .

٢ - فحص معاملات المتغيرات في دالة الهدف وتحديد ما إذا كان هناك متغير غير أساسي يمكن أن تؤدي زيادة قيمته عن قيمته الحالية وهي الصفر إلى تحسين الحل ، ونختار المتغير غير الأساسي الذي تؤدي زيادته إلى أكبر زيادة في قيمة دالة الهدف ، ويسمى هذا المتغير المتغير الداخل the entering variable ، فإذا لم نجد المتغير الذي يمكن أن يحسن الحل نكون قد وصلنا إل الحل الأمثل .

٣ - تزيد قيمة المتغير الداخل حتى تصل قيمة أحد المتغيرات الأساسية إلى الصفر ونسمي المتغير الذي يؤول للصفر المتغير الخارج the departing variable .

٤ - نحذف المتغير الداخل من جميع المعادلات بما فيها دالة الهدف باستثناء معادلة القيد المقابل للمتغير الخارج ثم نرجع للخطوة ٢ .

ويلاحظ أنه عند انتقال الحل من ركن إلى ركن آخر قريب منه في المثال المدروس نجد أن أحد المتغيرين المساويين للصفر (غير الأساسيين) يدخل في الحل كمتغير أساسي ليحل محل متغير أساسي آخر كان موجودا في الحل . فمثلا عند الانتقال من الركن ① إلى الركن ② تحول X_2 من متغير غير أساسي إلى متغير أساسي ليحل محل S_1 الذي تحول من متغير أساسي إلى متغير غير أساسي .

في المثال محل الدراسة ، نبدأ بالحل الذي يقابل نقطة الأصل كحل أساسي ممكن ، وهذا الحل يقابل مجموعة المعادلات الآتية :

$$(3) \qquad 5X_1 + 10X_2 + S_1 = 160$$

$$(4) \qquad X_1 + X_2 + S_2 = 24$$

$$(5) \qquad -90X_1 - 100X_2 + Z = 0$$

ونجد أن :

$$X_1 = 0 , X_2 = 0 , S_1 = 160 , S_2 = 24 , Z = 0$$

تقابل مجموعة المعادلات (5) ,(4) ,(3) ما يسمى بالحل المبدئي ، وبالنظر إلى المعادلتين (4) ,(3) نجد أنهما تحققان شرطين أساسيين هما :

١ - أن كل معادلة تقابل متغيرا أساسيا واحدا معامله يساوي واحد صحيح .

٢ - أن كل متغير أساسي يظهر في معادلة واحدة فقط ولا يظهر في معادلة دالة الهدف .

ويقال لمجموعة المعادلات التي تحقق هذين الشرطين أنها في الصورة المقننة the canonical form ، وفي إجراءات طريقة السمبلكس تكون المعادلات الممثلة لمرحلة حل معينة في هذه الصورة أي أن معاملات المتغيرات في الصورة المقننة هي مكونات جدول السمبلكس المقابل .

يمكن تحسين الحل بزيادة X_1 أو X_2 ونختار X_2 كمتغير داخل لأن كل وحدة من المنتج الثاني تدخل في الحل ستزيد قيمة دالة الهدف بمقدار 100 وحدة نقدية بينما أن كل وحدة من المنتج الأول تدخل في الحل ستزيد قيمة دالة الهدف بمقدار 90 وحدة نقدية .

وبصفة عامة لتحديد المتغير الداخل ننظر لمعادلة دالة الهدف وهي المعادلة رقم (5) في المثال المدروس ونختار المتغير الذي له أكبر معامل سالب وذلك في المعادلة الصفرية لدالة الهدف .

ولتحديد المتغير الخارج نجد أن المورد الأول يكفي لإنتاج 16 وحدة على الأكثر من المنتج الثاني ، ومن ناحية أخرى نجد أن المورد الثاني يكفي لإنتاج 24 وحدة على الأكثر من المنتج الثاني أي أنه لا يمكن إنتاج أكثر من 16 وحدة من المنتج الثاني في حدود المتاح من المورد الأول والمورد الثاني .

ولتحديد المتغير الخارج نوجد ما يسمى بنسبة الاختبار لكل معادلة والتي

سنشير لها بالرمز θ كالتالي :

المتغير الأساسي المقابل	نسبة الاختبار θ	المعادلة
S_1	$160 \div 10 = 16$	(3)
S_2	$24 \div 1 = 24$	(4)

والمتغير الخارج هو الذي يقابل أقل نسبة اختبار أي S_1 لأنه عندما يصل X_2 إلى 16 سيؤول المتغير الأساسي S_1 في المعادلة (3) للصفر، وزيادة X_2 عن 16 وحدة سيجعل S_1 سالبا ويتطلب ذلك كمية من المورد الأول أكبر من الكمية المتاحة. وتعرف المعادلة (3) وهي التي تقابل المتغير الخارج بمعادلة الدوران pivotal equation و S_1 هو المتغير الخارج ويعرف معامل المتغير الداخل في معادلة الدوران بعنصر الدوران أو العنصر الدليل pivot element or key element وهو يساوي 10 .

وللحصول على الصور المقننة الجديدة نقسم المعادلة الدليل على عنصر الدوران وهو 10 فنحصل على :

$$X_2 = -\frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{10}S_1 + 16$$

ولحذف المتغير الداخل وهو X_2 من المعادلتين (5) ,(4) ، نعوض عنه في هاتين المعادلتين ونحصل على :

المعادلة السابقة

(3) $$\frac{1}{2}X_1 + X_2 + \frac{1}{10}S_1 = 16$$

(4) $$X_1 + \left(-\frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{10}S_1 + 16\right) + S_2 = 24$$

(5) $$-90X_1 - 100\left(-\frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{10}S_1 + 16\right) + Z = 0$$

وذلك حتى يكون المتغير الأساسي الجديد في معادلة واحدة فقط ويحذف من المعادلات الأخرى ونحصل على المعادلات والحلول الآتية :

الحل	المعادلة	
$X_2 = 16$	$\frac{1}{2}X_1 + X_2 + \frac{1}{10}S_1 = 16$	(6)
$S_2 = 8$	$\frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{10}S_1 + S_2 = 8$	(7)
$Z = 1600$	$-40X_1 + 10S_1 + Z = 1600$	(8)

حيث إن المتغير الأساسي المقابل لكل معادلة معامله واحد صحيح وباقي المتغيرات غير أساسية وتساوي صفرا فتكون قيمة المتغير الأساسي في كل معادلة مساوية لطرفها الأيمن .

وحيث إن معامل X_1 في معادلة دالة الهدف سالب ، فهناك إمكانية لتحسينها بجعل X_1 متغيرا داخلا .

ولتحديد المتغير الخارج نوجد نسبة الاختبار كالتالي :

المتغير الأساسي	نسبة الاختبار	المعادلة
$X_2 = 32$	$16 \div \frac{1}{2} = 32$	(6)
$S_2 = 16$	$8 \div \frac{1}{2} = 16$	(7)

المتغير الخارج هو S_2 لأنه سيؤول للصفر أولا عند زيادة X_1. وبقسمة المعادلة (7) وهي القابلة للمتغير الخارج على $\frac{1}{2}$ لجعل معامل المتغير الداخل يساوي واحدا نحصل على :

$$X_1 - \frac{1}{5}S_1 + 2S_2 = 16$$

$$\therefore\ X_1 = \frac{1}{5}S_1 - 2S_2 + 16$$

وكما في مرحلة الحل السابقة تصبح معادلات هذه المرحلة كالتالي:

المعادلة السابقة

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}S_1 - 2S_2 + 16\right) + X_2 + \frac{1}{10}S_1 = 16 \quad (6)$$

$$X_1 - \frac{1}{5}S_1 + 2S_2 = 16 \quad (7)$$

$$-40\left(\frac{1}{5}S_1 - 2S_2 + 16\right) + 10S_1 + Z = 1600 \quad (8)$$

ونحصل على المعادلات والحلول الآتية:

الحل	المعادلة	
$X_2 = 8$	$X_2 + \frac{1}{5}S_1 - S_2 = 8$	(9)
$X_1 = 16$	$X_1 - \frac{1}{5}S_1 - 2S_2 = 16$	(10)
$Z = 2240$	$2S_1 + 80S_2 + Z = 2240$	(11)

وحيث إن معامل S_2 و S_1 في معادلة دالة الهدف موجب فإن إضافة وحدات جديدة من هذين المتغيرين في الحل سيخفض قيمة دالة الهدف وبالتالي فإن الحل السابق هو الحل الأمثل.

من ذلك تتضح الفكرة التي تعتمد عليها طريقة السمبلكس وهي أن نبدأ بنقطة متطرفة (أو ركن) من نقط (أو أركان) المنطقة الممكنة للحل (في هذه الحالة حيث إن دالة الهدف في صورة تعظيم والقيود الهيكلية في صورة أقل من أو يساوي نبدأ بنقطة الأصل) ومنها نحصل على حل أساسي ممكن أوّلي أو مبدئي initial basic feasible solution ثم ننتقل إلى نقطة متطرفة (أو ركن) قريبة بإحلال متغير غير أساسي (خارج الحل) محل متغير أساسي (موجود في الحل) مع تحسين قيمة دالة الهدف وذلك فيما عدا الحالة الخاصة التي يكون فيها تحلل degeneracy وتكون قيمة متغير أساسي أو أكثر مساوية للصفر حيث لا تتغير قيمة دالة الهدف كما سنرى فيما بعد.

ويمكننا الآن تلخيص خطوات إجراءات طريقة السمبلكس حينما تكون دالة الهدف في صورة تعظيم والقيود الهيكلية في صورة أقل من أو يساوي فيما يلي :

١ - تهيئة البرنامج بإضافة متغير إضافي إلى الطرف الأيسر في كل قيد هيكلي لتحويله إلى معادلة وكذلك إعادة كتابة دالة الهدف، فإذا كانت على الصورة: $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$ فإننا نكتبها كالتالي :

$$-\sum_{j=1}^{n} C_j X_j - \sum_{i=1}^{m} C_i S_i + Z = 0$$

حيث C_i تشير إلى معامل المتغير الإضافي S_i الذي يقابل القيد i وهو يساوي صفرا .

٢ - اختيار المتغير الداخل وهو الذي له أكبر معامل سالب في معادلة دالة الهدف، فإذا وجدنا متغيرين أو أكثر لهم أكبر معامل سالب متساو نختار أيا منهم، وإذا لم نجد أي معامل من معاملات المتغيرات في دالة الهدف سالبا، فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل .

٣ - إذا كان معامل المتغير الداخل موجبا في كل معادلة قيد، نقسم الطرف الأيمن للقيد على هذا المعامل لنحصل على ما يسمى بنسبة الاختبار، وإذا كان معامل المتغير الداخل صفرا أو سالبا في معادلة قيد نهملها عند تحديد المتغير الخارج ونختار ما يسمى بالمعادلة الدليل وهي المعادلة التي تقابل أقل نسبة اختبار، والمتغير الخارج هو المتغير الأساسي الحالي في المعادلة الدليل، ويعرف معامل المتغير الداخل في المعادلة الدليل بالعنصر الدليل .

٤ - نقسم جميع المعاملات في المعادلة الدليل على العنصر الدليل ويصبح المتغير الداخل هو المتغير الأساسي في هذه المعادلة، وتصبح هذه المعادلة في معادلات المرحلة التالية للحل بدون تغيير موقعها أي إنها تصبح معادلة مبدئية في الصورة المقننة للتقريب التالي .

٥ - من المعادلة المبدئية نوجد المتغير الداخل كدالة في المتغيرات الأخرى ونستخدم ذلك في حذفه من جميع المعادلات الأخرى .

٦ - نكون مجموعة المعادلات المقننة الجديدة التي تشمل المعادلة المبدئية ثم نحدد الحل ونرجع إلى خطوة ٢ .

تطبق الخطوات السابقة بدون كتابة المتغيرات في كل معادلة وذلك باستخدام ما يسمى بجداول السمبلكس ، وفي المثال محل الدراسة نكون ما يسمى بجدول السمبلكس المبدئي الذي يقابل المعادلات (5) ,(4) ,(3) كالتالي :

عمود	0	0	-100	-90	معاملات	
الحل	S_2	S_1	X_2	X_1	المتغير الأساسي	دالة الهدف
160	0	1	10	5	S_1	0
24	1	0	1	1	S_2	0
0	0	0	–100	–90	صف الأدلة	

ويتكون الجدول السابق مما يلي :

١ - صف المتغيرات الأصلية والفائضة : تكتب في هذا الصف المتغيرات الأصلية والفائضة الموجودة في البرنامج .

في المثال المدروس يوجد لدينا متغيران أصليان X_1,X_2 ومتغيران فائضان S_1,S_2 .

٢ - صف معاملات دالة الهدف : وهو الصف الأعلى في جدول السمبلكس والمعاملات الموجودة به هي معاملات المتغيرات الأصلية والفائضة في معادلة دالة الهدف على الصورة الصفرية في مرحلة الحل المبدئي ، ومعاملات هذا الصف ثابتة لبرنامج معين في جميع المراحل المتتالية للحل . في المثال المدروس نجد أن المعاملين المقابلين للمتغيرين الأصليين X_1 , X_2 هما 100– ,90– والمعاملين المقابلين للمتغيرين الفائضين S_1 , S_2 هما 0 ,0 على الترتيب .

٣ - عمود المتغيرات الأساسية : يكتب في هذا العمود المتغير الأساسي لكل معادلة قيد ، والمتغيرات الأساسية هي كما ذكرنا متغيرات الحل والمتغيرات غير

الأساسية هي المتغيرات غير الموجودة في الحل وتساوي صفرا، وفي جدول السمبلكس السابق نجد أن المتغير الأساسي المقابل لكل معادلة قيد هو المتغير الفائض.

٤ - عمود معاملات دالة الهدف: والمعاملات الموجودة في هذا العمود هي معاملات المتغيرات الأساسية المقابلة في معادلة دالة الهدف الصفرية في الحل المبدئي، وفي جدول السمبلكس المبدئي السابق نجد أن معامل كل من S_1, S_2 في المعادلة (5) يساوي صفرا.

٥ - الصف القياسي أو صف الأدلة index row وهو الصف المقابل لمعادلة دالة الهدف الصفرية في التقريب المقابل، أي المقابل للمعادلة (5) في جدول السمبلكس المبدئي السابق، ويتكون من القيم المقابلة للمتغيرات الأصلية والإضافية وكذلك من القيمة الموجودة في عمود الحل، والقيمة في صف الأدلة تحت متغير معين تساوي معامل المتغير في الصف الأعلى مطروحا منه مجموع حاصل ضرب معاملات العمود الذي يقع تحت هذا المتغير في معاملات المتغيرات الأساسية المقابلة والموجودة في العمود الأيسر، ونجد في جدول السمبلكس المبدئي السابق أن القيمة في صف الأدلة المقابلة لمتغير معين هي نفسها معامل المتغير في الصف الأعلى وذلك لأن كل من معامل S_1, S_2 في عمود معاملات دالة الهدف يساوي صفرا.

وقيمة صف الأدلة في عمود الحل تساوي مجموع حاصل ضرب القيم في عمود الحل في معاملات المتغيرات الأساسية المقابلة الموجودة في العمود الأيسر بإشارة مخالفة حيث إنها معاملات المتغيرات في معادلة دالة الهدف الصفرية. في جدول السمبلكس المبدئي السابق حيث إن معامل المتغيرين الأساسيين S_1, S_2 في العمود الأيسر يساوي صفر فإن القيمة في عمود الحل تساوي صفرا.

ونلخص فيما يلي كيفية اختبار أمثلية الحل وكيفية تحسينه إذا كان غير أمثل:

١ - إذا كانت أي قيمة في صف الأدلة سالبة يكون الحل غير أمثل وننتقل للخطوة التالية، أما إذا كانت جميع قيم هذا الصف موجبة أو تساوي صفرا فإن الحل يكون أمثل وتكون المتغيرات الأساسية هي متغيرات الحل الأمثل والقيم المقابلة لها في عمود الحل هي قيم الحل الأمثل.

في جدول السمبلكس المبدئي السابق نجد قيمتين سالبتين في صف الأدلة فنستمر في الحل.

٢ - نحدد المتغير الداخل، وهو الذي يقابل أكبر قيمة سالبة في صف الأدلة، وحيث إن القيمة المقابلة لـ X_1 هي 90- والقيمة المقابلة لـ X_2 هي 100- فنختار X_2 متغيرا داخلا ويسمى العمود المقابل للمتغير الداخل العمود الداخل incoming column.

٣ - لتحديد المتغير الخارج نحسب نسبة الاختبار لكل صف في جدول السمبلكس، ونسبة الاختبار لصف معين هي خارج قسمة القيمة في عمود الحل على المعامل المقابل في العمود الداخل، في المثال المدروس نجد أن نسبة الاختبار المقابلة للمتغير S_1 هي $160 \div 10 = 16$، والمقابلة لـ S_2 هي $24 \div 1 = 24$ ويكون المتغير الخارج هو المتغير الأساسي المقابل لأقل قيمة غير سالبة لنسبة الاختبار.

يسمى الصف المقابل للمتغير الخارج الصف الخارج outgoing row ويسمى العنصر الذي ينتج من تقاطع الصف الخارج والعمود الداخل بعنصر الدوران، وهو في المثال محل الدراسة 10 في هذه المرحلة من الحل.

٤ - نكون جدول السمبلكس الأول بإحلال المتغير الداخل X_2 محل المتغير الخارج S_1 كالتالي:

عمود الحل	S_2	S_1	X_2	X_1	المتغير الأساسي	
					X_2	-100
					S_2	0
					صف الأدلة	

ثم نقسم كل عنصر من عناصر الصف الخارج في جدول السمبلكس المبدئي على عنصر الدوران كما في الجدول الآتي:

	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S_1	S_2	عمود الحل
−100	X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	0	16
0	S_2					
صف الأدلة			0		0	

العنصر الذي يمثل تقاطع المتغير الأساسي في الصف بنفس المتغير في العمود يساوي واحدا صحيحا، أما باقي عناصر الأعمدة المقابلة للمتغيرات الأساسية فتساوي أصفارا، ونحسب باقي العناصر داخل الجدول كالتالي:

قيمة العنصر في الجدول الجديد تساوي قيمة العنصر المقابل في الجدول السابق مطروحا منه النسبة التي تمثل حاصل ضرب العنصر المقابل في العمود الداخل في العنصر المقابل في الصف الخارج في الجدول السابق ومقسوما على العنصر الدليل، وفي المثال المدروس نجد أن العنصر المقابل لصف S_2 وعمود X_1 يساوي:

$$1 - \frac{5 \times 1}{10} = \frac{1}{2}$$

كذلك الأمر بالنسبة للعنصر المقابل لصف S_2 وعمود S_1 والمقابل لصف S_2 وعمود S_1 والمقابل لصف S_2 وعمود الحل حيث نحصل على جدول السمبلكس الأول والذي يقابل المعادلات (8) ,(7) ,(6) كالتالي:

		−90	−100	0	0		
	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S_1	S_2	عمود الحل	نسبة الاختيار
−100	X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	0	16	32
0	S_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{10}$	1	8	16
صف الأدلة		−40	0	10	0	1600	

والحل المقابل للجدول السابق هو :

$$X_1 = 0 \; , X_2 = 16 \; , S_1 = 0 \; , S_2 = 16 \; , Z = 1600$$

٦ - نكرر الخطوات من (1) إلى (5) حتى نصل إلى الحل الأمثل .

في المثال المدروس نجد أن جدول السمبلكس الثاني والنهائي الذي يقابل المعادلات (11) ,(10) ,(9) كالتالي :

		-90	-100	0	0	عمود الحل
	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S_1	S_2	
-100	X_2	0	1	$\frac{1}{5}$	-1	8
-90	X_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	2	16
صف الأدلة		0	0	2	80	2240

من الجدول السابق نحصل على :

$$X_1^* = 16 \; , \; X_2^* = 8 \; , \; S_1^* = 0 \; , \; S_2^* = 0 \; , \; Z^* = 2240$$

يلاحظ أن قيمة العناصر في صف الأدلة بعد تغيير إشارتها تمثل مقدار التحسن في قيمة دالة الهدف الناتجة من زيادة المتغير المقابل بوحدة واحدة ، فمثلا عند الانتقال من جدول السمبلكس الأول إلى جدول السمبلكس الثاني كان المتغير الداخل هو X_1 والمعامل المقابل له في الصف القياسي 40- فزيادة X_1 بوحدة واحدة تزيد قيمة دالة الهدف بـ 40 وحدة نقدية وفي الجدول التالي نجد أن $X_1 = 16$ وعلى ذلك فإن قيمة دالة الهدف تزيد بمقدار 640 = (40) (16) وحدة نقدية وهو الفرق بين قيمتي دالة الهدف في الجدولين .

معالجة القيود التي في صورة أكبر من أو يساوي والتي في صورة معادلات

يلاحظ أن القيود الهيكلية في المثال السابق كانت في صورة متباينات من النوع أقل من أو يساوي ولتحويلها للصورة المقننة the canonical form التي تعتمد عليها

طريقة السمبلكس أضفنا متغيرا فائضا slack variable للطرف الأيسر لكل متباينة لتحويلها إلى معادلة وكان معامل المتغير الإضافي يساوي واحدا صحيحا وكانت المتغيرات الإضافية هي المتغيرات الأساسية في جدول السمبلكس المبدئي للبرنامج.

سنفرض أن لدينا متباينة على الشكل الآتي:

$$5X_1 + 8X_2 \geq 90$$

يمكن تحويل هذه المتباينة إلى معادلة بطرح ما يسمى بالمتغير الزائد surplus variable من الطرف الأيسر لتصبح:

$$5X_1 + 8X_2 - T = 90$$

حيث يمثل T المتغير الزائد.

ولكن الصورة المقننة التي تعتمد عليها طريقة السمبلكس تتطلب أن يكون معامل المتغير الأساسي الذي نبدأ به الحل يساوي واحد، فإذا ضربنا طرفي المعادلة في ناقص واحد يصير الطرف الأيمن سالبا وذلك غير مسموح به في طريقة السمبلكس لأنه يجعل قيمة المتغير الأساسي لهذه المعادلة سالبة مما يتناقض مع شرط اللاسالبية. لذلك نضيف ما يسمى بالمتغير الصناعي artificial variable إلى الطرف الأيسر من المعادلة ونشير له بالرمز A ونجعل معامل هذا المتغير في دالة الهدف قيمة كبيرة M سالبة في حالة تعظيم دالة الهدف وذلك حتى يختفي هذا المتغير من الحل في المراحل المتتالية، فإذا لم يختف المتغير الصناعي في جدول السمبلكس النهائي فإن ذلك يشير إلى عدم وجود منطقة ممكنة للحل وقد تعرفنا على هذه الحالة ضمن الحالات الخاصة التي تقابلنا عند حل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية وسوف نتناولها بمثال عند عرض الحالات الخاصة بطريقة السمبلكس.

مثال ٢

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\max Z = 4X_1 + 6X_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 + 2X_2 \geq 4$$
$$X_1 + X_2 \leq 10$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

لتهيئة البرنامج لاستخدام طريقة السمبلكس نطرح من الطرف الأيسر للقيد الهيكلي الأول المتغير الزائد T ونضيف له المتغير الصناعي A ، ونضيف للطرف الأيسر للقيد الهيكلي الثاني المتغير الإضافي S ونعيد كتابة البرنامج في الصورة الآتية :

$$\max Z = 4X_1 + 6X_2 + 0T + 0S - M A$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 + 2X_2 - T + A = 4$$
$$X_1 + X_2 + S = 10$$
$$X_1 , X_2 , T , S , A \geq 0$$

ونحول دالة الهدف السابقة للصورة الصفرية كالتالي :

$$-4X_1 - 6X_2 - 0T - 0S + M A + Z = 0$$

ومنه نحصل على جدول السمبلكس المبدئي الآتي :

معاملات دالة		-4	-6	0	0	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	T	S	A	الحل	الاختبار θ
M	A	1	2	-1	0	1	4	2
0	S	1	1	0	1	0	10	10
صف الأدلة		$-4-M$	$-6-2M$	M	0	0	$-4M$	

المتغير الداخل هو X_2 والمتغير الخارج هو A أي أن X_2 سيحل محل A ونحصل على جدول السمبلكس التالي :

معاملات دالة		–4	–6	0	0	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	T	S	A	الحل	الاختبار θ
–6	X_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	–
0	S	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	8	16
صف الأدلة		–1	0	–3	0	3+M	12	

المتغير الداخل هو T والمتغير الخارج هو S أي إن T سيحل محل S ونحصل على جدول السمبلكس الآتي :

معاملات دالة		–4	–6	0	0	M	عمود
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	T	S	A	الحل
–6	X_2	1	1	0	1	0	10
0	T	1	0	1	2	–1	16
صف الأدلة		2	0	0	6	M	60

وحيث إن عناصر صف الأدلة موجبة أو تساوي صفرا فإن جدول السمبلكس السابق هو الجدول النهائي ومنه نحصل على الحل الأمثل كالتالي :

$$X_1^* = 0 \ , \ X_2^* = 10 \ , \ T^* = 16 \ , \ S^* = 0 \ , \ Z^* = 60$$

مثال ٣

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 5X_1 + 2X_2 + 7X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 + 3X_2 + X_3 = 36$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 40$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

لتهيئة البرنامج لاستخدام طريقة السمبلكس، نضيف للطرف الأيسر للقيد الهيكلي الأول المتغير الصناعي A ، ونضيف المتغير الإضافي S للطرف الأيسر للقيد الهيكلي الثاني، ونعيد كتابة البرنامج كالتالي :

$$\max Z = 5X_1 + 2X_2 + 7X_3 + 0S - MA$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 + 3X_2 + X_3 + A = 36$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 + S = 40$$
$$X_1 , X_2 , X_3 , S , A \geq 0$$

ونحول دالة الهدف السابقة للصورة الصفرية كالتالي :

$$-5X_1 - 2X_2 - 7X_3 - 0S + MA + Z = 0$$

ومنه نكون جدول السمبلكس المبدئي الآتي :

معاملات دالة		-5	-2	-7	0	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	X_3	S	A	الحل	الاختبار θ
M	A	1	3	1	0	1	36	12
0	S	2	1	1	1	0	40	40
صف الأدلة		$-5-M$	$-2-3M$	$-7-M$	0	0	$-36M$	

X_2 هو المتغير الداخل و A هو المتغير الخارج، ونستمر في الحل .

مثال ٤

نفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 7X_1 + 5X_2 + 3X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \geq 30$$
$$4X_1 + 2X_2 + X_3 = 18$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

لتهيئة البرنامج لاستخدام طريقة السمبلكس ، نطرح من الطرف الأيسر للقيد الهيكلي الأول المتغير الزائد T ، ونضيف له المتغير الصناعي A_1 ، ونضيف للطرف الأيسر للقيد الهيكلي الثاني المتغير الصناعي A_2 ونعيد كتابة البرنامج كالتالي :

$$\max Z = 7X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 0T - M A_1 - M A_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 - T + A_1 = 30$$
$$4X_1 + 2X_2 + X_3 + A_2 = 18$$
$$X_1 , X_2 , X_3 , T , A_1 , A_2 \geq 0$$

ونحول دالة الهدف السابقة للصورة الصفرية كالتالي :

$$- 7X_1 - 5X_2 - 3X_3 - 0T + M A_1 + M A_2 + Z = 0$$

ومنه نحصل على جدول السمبلكس المبدئي الآتي :

معاملات دالة		-7	-5	-3	0	M	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	X_3	T	A_1	A_2	الحل	الاختبار θ
M	A_1	1	3	2	-1	1	0	30	30
M	A_2	4	2	1	0	0	1	18	4.5
الصف القياسي		$-7-5M$	$-5-5M$	$-3-3M$	M	0	0	$-48M$	

X_1 هو المتغير الداخل و A_2 هو المتغير الخارج ، ونستمر في الحل .

مثال ٥

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\min C = 2X_1 - 2X_2 - X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$- X_1 + X_2 - 2X_3 \leq - 20$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 24$$

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \geq 0$$

يلاحظ أن دالة الهدف للبرنامج السابق في صورة تصغير ، ولتطبيق الإجراءات السابقة لطريقة السمبلكس نحولها إلى صورة تعظيم بضرب كل حد من حدودها في (1–) لأن :

$$\min C = \max - C = \max Z$$

(مع افتراض أن $Z = - C$)

ويلاحظ أن الطرف الأيمن للقيد الهيكلي الأول سالب ، وذلك غير مسموح به في طريقة السمبلكس لأن ذلك يجعل قيمة المتغير الأساسي المقابل لمعادلة هذا القيد سالبة ، لذلك نضرب كل حد من حدود هذا القيد في (1–) ونعيد كتابة البرنامج السابق كالتالي :

$$\max Z = - 2X_1 + 2X_2 + X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 - X_2 + 2X_3 \geq 20$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 24$$

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \geq 0$$

ولتهيئة البرنامج لاستخدام طريقة السمبلكس كما سبق ، نطرح المتغير الزائد T من الطرف الأيسر للقيد الهيكلي الأول ونضيف له متغيرا صناعيا A_1، كما نضيف متغيرا

صناعيا A_2 للطرف الأيسر للقيد الهيكلي الثاني ونعيد كتابة البرنامج كالتالي :

$$\max Z = -2X_1 + 2X_2 + X_3 + 0T - MA_1 - MA_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 - X_2 + 2X_3 - T + A_1 = 20$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 + A_2 = 24$$

$$X_1, X_2, X_3, T, A_1, A_2 \geq 0$$

ونحول دالة الهدف السابقة للصورة الصفرية كالتالي :

$$2X_1 - 2X_2 - X_3 - 0T + MA_1 + MA_2 + Z = 0$$

ومنه نحصل على جدول السمبلكس المبدئي الآتي :

معاملات دالة		2	−2	−1	0	M	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	X_3	T	A_1	A_2	الحل	الاختبار θ
M	A_1	1	−1	2	−1	1	0	20	10
M	A_2	1	2	1	0	0	1	24	24
صف الأدلة		$2-2M$	$-2-M$	$-1-3M$	M	0	0	$-44M$	

المتغير الداخل هو X_3 والمتغير الخارج هو A_1 ونستمر في الحل .

ويمكن حل البرنامج السابق بجعل دالة الهدف كما هي في صورة تصغير وتكون كالتالي :

$$\min C = 2X_1 - 2X_2 - X_3 - 0T + MA_1 + MA_2$$

حيث إن معامل كل من A_2 ، A_1 هو $+M$ وليس $-M$ كما في حالة تعظيم دالة الهدف وذلك حتى نتخلص من هذين المتغيرين الصناعيين في مراحل الحل المتتالية للسمبلكس ، ونعيد كتابة دالة الهدف في الصورة الصفرية كالتالي :

$$-2X_1 + 2X_2 + X_3 + 0T - MA_1 - MA_2 + C = 0$$

ونكون جدول السمبلكس المبدئي كالتالي :

معاملات دالة		-2	2	1	0	$-M$	$-M$	عمود الحل	نسبة الاختبار θ
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	X_3	T	A_1	A_2		
$-M$	A_1	1	-1	2	-1	1	0	20	10
$-M$	A_2	1	2	1	0	0	1	24	24
صف الأدلة		$-2+2M$	$2+M$	$1+3M$	$-M$	0	0	$44M$	

المتغير الداخل في هذه الحالة هو الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في صف الأدلة وليس أكبر قيمة سالبة كما في حالة تعظيم دالة الهدف، ونستمر في مراحل الحل المتتالية ونحصل على الحل النهائي عندما تكون عناصر الصف القياسي سالبة أو تساوي صفرا.

بعض الحالات الخاصة للبرنامج الخطى باستخدام طريقة السمبلكس

سبق أن عرضنا باستخدام الطريقة البيانية ثلاث حالات خاصة تقابلنا عند حل البرنامج الخطي وهي حالة عدم وجود منطقة ممكنة للحل، وحالة وجود دالة هدف غير محدودة، وحالة وجود حلول مثلى متعددة، وسوف نعيد عرض هذه الحالات باستخدام طريقة السمبلكس بالإضافة إلى حالة رابعة وهي حالة التحلل degeneracy .

١ - عدم وجود منطقة ممكنة للحل

نكتشف هذه الحالة إذا وجدنا متغيرا صناعيا أو أكثر في جدول السمبلكس النهائي في عمود المتغيرات الأساسية وذلك لأن الحل يعتمد على جعل المتغير الصناعي في دالة الهدف قيمة كبيرة M سالبة في حالة تعظيم دالة الهدف حتى يختفي هذا المتغير الصناعي من الحل في التقريبات المتتالية ويحل محله المتغيرات غير الصناعية، فإذا لم يختف المتغير الصناعي في جدول السمبلكس النهائي فإن ذلك يشير إلى عدم وجود حل ممكن للمشكلة الأصلية. وكما ذكرنا من قبل، يجب في

هذه الحالة إعادة صياغة المشكلة والنظر فيما إذا كان بعض القيود الهيكلية في حاجة إلى تعديل أو أن هناك قيدا مهما لم يؤخذ في الاعتبار . . . الخ .

مثال ٦

نعيد حل مثال ٤ في الفصل السابق باستخدام طريقة السمبلكس ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي كالتالي :

معاملات دالة		−3	−4	0	0	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S	T	A	الحل	الاختبار θ
0	S	2	3	1	0	0	30	10
M	A	2	3	0	−1	1	42	14
صف الأدلة		$-3-2M$	$-4-3M$	0	M	0	$-42M$	

حيث S = المتغير الفائض المقابل للقيد الهيكلي الأول

، T = المتغير الزائد المقابل للقيد الهيكلي الثاني

، A = المتغير الصناعي المقابل للقيد الهيكلي الثاني

المتغير الداخل هو X_2 والمتغير الخارج هو S ، ونحصل على جدول السمبلكس الأول كالتالي :

معاملات دالة		−3	−4	0	0	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S	T	A	الحل	الاختبار θ
−4	X_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	10	15
M	A	0	0	−1	−1	1	12	–
صف الأدلة		$-\frac{1}{3}$	0	$M+\frac{4}{3}$	M	0	$-12M+40$	

المتغير الداخل هو X_1 والمتغير الخارج هو X_2 ، ونحصل على جدول السمبلكس الثاني كالتالي :

معاملات دالة		-3	-4	0	0	M	عمود
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S	T	A	الحل
-3	X_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	15
M	A	0	0	-1	-1	1	12
صف الأدلة		0	$\frac{1}{2}$	$M+\frac{3}{2}$	M	0	$-12M+45$

يلاحظ أن جدول السمبلكس السابق هو الجدول النهائي لأنه لا يوجد أي عنصر سالب في صف الأدلة ولكن المتغير الصناعي A لم يختف من عمود المتغيرات الأساسية ويدل ذلك على أن البرنامج الخطي محل الدراسة بدون منطقة ممكنة للحل .

٢ – دالة الهدف غير محدودة

ذكرنا من قبل أن هذه الحالة تشير إلى أن صياغة البرنامج خاطئة ، ونكتشف ذلك عند حل البرنامج باستخدام طريقة السمبلكس عند عدم وجود معامل موجب في العمود الداخل أي في العمود المقابل للمتغير الداخل وذلك لأنه عند تحديد المتغير الخارج نحسب النسبة بين القيمة في عمود الحل والمعاملات المقابلة في العمود الداخل وتناظر أقل نسبة المتغير الأساسي الذي يؤول إلى الصفر أولا عند زيادة المتغير الداخل ، فإذا لم توجد نسبة موجبة فإن ذلك يعني أنه لا يؤول إلى الصفر أي متغير في الحل عند زيادة قيمة المتغير الداخل ، وبالتالي فإن دالة الهدف تزيد بدون حد إذا كان من المطلوب تعظيمها أو تنخفض بدون حد إذا كان من المطلوب تصغيرها .

مثال ٧

نعيد حل مثال ٥ في الفصل السابق باستخدام طريقة السمبلكس، ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي الآتي :

معاملات دالة		-2	-2	0	0	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S_1	S_2	الحل	الاختبار θ
0	S_1	2	-2	1	0	4	2
0	S_2	-2	2	0	1	4	–
صف الأدلة		-2	-2	0	0	0	

حيث S_1 = المتغير الفائض المقابل للقيد الأول

، S_2 = المتغير الفائض المقابل للقيد الثاني

يلاحظ أن المتغير الداخل هو إما X_1 أو X_2 لأن قيمة العنصر في صف الأدلة المقابل لكل منهما تساوي 2-، سنختار X_1 كمتغير داخل ونحصل على جدول السمبلكس الآتي :

معاملات دالة		-2	-2	0	0	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S_1	S_2	الحل	الاختبار θ
-2	X_1	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{2}{-1}$
0	S_2	0	0	1	1	8	$\frac{8}{0}$
صف الأدلة		0	-4	1	0		

يلاحظ في مرحلة الحل السابقة أنه بالرغم من وجود عنصر سالب في الصف القياسي وهو 4- يقابل المتغير X_2 إلا أن إجراءات الحل تتوقف لعدم وجود عنصر

موجب في العمود المقابل للمتغير الداخل X_2 .

وتحدث هذه الحالة بصفة عامة عندما يكون مقام نسبة الاختبار التي يعتمد عليها تحديد المتغير الخارج غير موجب .

٣ - وجود حلول مثلى متعددة

إذا وجدنا في جدول السمبلكس النهائي الذي يقابل الحل الأمثل أن المعامل المقابل لمتغير غير أساسي في الصف القياسي يساوي صفر فإنه يمكن إيجاد حل أمثل آخر بجعل هذا المتغير متغيرا داخلا في جدول السمبلكس التالي ونحصل على حلين أمثلين ، ويمكن إيجاد حلول مثلى أخرى متعددة من هذين الحلين باستخدام تكوينة خطية منهما .

مثال ٨

نعيد حل مثال ٦ في الفصل السابق باستخدام طريقة السمبلكس فنكون جدول السمبلكس المبدئي الآتي :

معاملات دالة		-1	-2	0	0	0	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل	الاختبار θ
0	S_1	1	2	1	0	0	10	5
0	S_2	1	0	0	1	0	6	–
0	S_3	0	1	0	0	1	4	4
صف الأدلة		-1	-2	0	0	0	0	

حيث S_1 = المتغير الفائض المقابل للقيد الأول

، S_2 = المتغير الفائض المقابل للقيد الثاني

، S_3 = المتغير الفائض المقابل للقيد الثالث

المتغير الداخل هو X_2، والمتغير الخارج هو S_3 ونكون جدول السمبلكس الأول كالتالي :

الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الحل	نسبة الاختبار θ
معاملات دالة		–1	–2	0	0	0		
0	S_1	1	0	1	0	–2	2	2
0	S_2	1	0	0	1	0	6	6
–2	X_2	0	1	0	0	1	4	–
صف الأدلة		–1	0	0	0	2	8	

المتغير الداخل هو X_1، والمتغير الخارج هو S_1 ونكون جدول السمبلكس الآتي :

الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الحل	نسبة الاختبار θ
معاملات دالة		–1	–2	0	0	0		
–1	X_1	1	0	1	0	–2	2	–
0	S_2	0	0	–1	1	2	4	2
–2	X_2	0	1	0	0	1	4	4
صف الأدلة		0	0	1	0	0	10	

مرحلة الحل السابقة هي المرحلة النهائية التي تقابل الحل الأمثل لأنه لا توجد أي قيمة سالبة في صف الأدلة والحل الأمثل المقابل هو :

$$X_1^* = 2 \ , \ X_2^* = 4 \ , \ S_1^* = 0 \ , \ S_2^* = 4 \ , \ Z^* = 10$$

ويلاحظ أن S_3 متغير غير أساسي ومعامله في الصف القياسي يساوي صفرا ، وبجعله متغيرا داخلا يحل محل S_2 نحصل على جدول السمبلكس الآتي :

معاملات دالة		-1	-2	0	0	0	عمود
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل
-1	X_1	1	0	0	1	0	6
0	S_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
-2	X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
صف الأدلة		0	0	1	0	0	10

والحل الأمثل المقابل للجدول السابق هو :

$$X_1^* = 6 \ , \ X_2^* = 2 \ , \ S_1^* = 0 \ , \ S_2^* = 0 \ , \ S_3^* = 2 \ , \ Z^* = 10$$

ويلاحظ أن الحل الأمثل الأول يقابل النقطة المتطرفة (2 ,4) ، وأن الحل الأمثل الثاني يقابل النقطة المتطرفة (6,2) في منطقة الحلول الممكنة كما هو موضح بالتمثيل البياني للمثال محل الدراسة في الفصل السابق (شكل ٧) .

ويمكن كما ذكرنا إيجاد حلول مثلى أخرى متعددة من هذين الحلين باستخدام تكوينة خطية منهما ، وكل حل من هذه الحلول يقابل نقطة معينة على الخط الواصل بين النقطتين (6,2) ,(4 ,2) ، وتؤدي كل الحلول المثلى إلى قيمة دالة الهدف نفسها .

٤ - التحلل

نقابل هذه الحالة عندما تتضمن المتغيرات الأساسية في تقريب معين من تقريبات طريقة السمبلكس متغيرا أو أكثر قيمته تساوي صفرا ، وينشأ ذلك في تقريب معين عندما تتساوي أقل نسبة اختبار موجبة (التي يتم على أساسها تحديد المتغير الخارج) لأكثر من متغير أساسي في التقريب السابق .

ويمكن أن نسير في إجراءات الحل كالمعتاد، فإما أن نصل إلى الحل الأمثل أو أن نصل إلى الحل الذي بدأنا به، وفي هذه الحالة نرجع إلى جدول السمبلكس الذي وجدنا به تساويا في نسبة الاختبار، ونختار متغيرا خارجا مختلفا عن الذي اختير من قبل.

وتحدث هذه الحالة عند الحل البياني للبرنامج الخطي عندما تقابل نقطة الحل الأمثل أكثر من قيدين كما هو مبين بالمثال الآتي:

مثال ٩

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\min C = 3X_1 + X_2$$

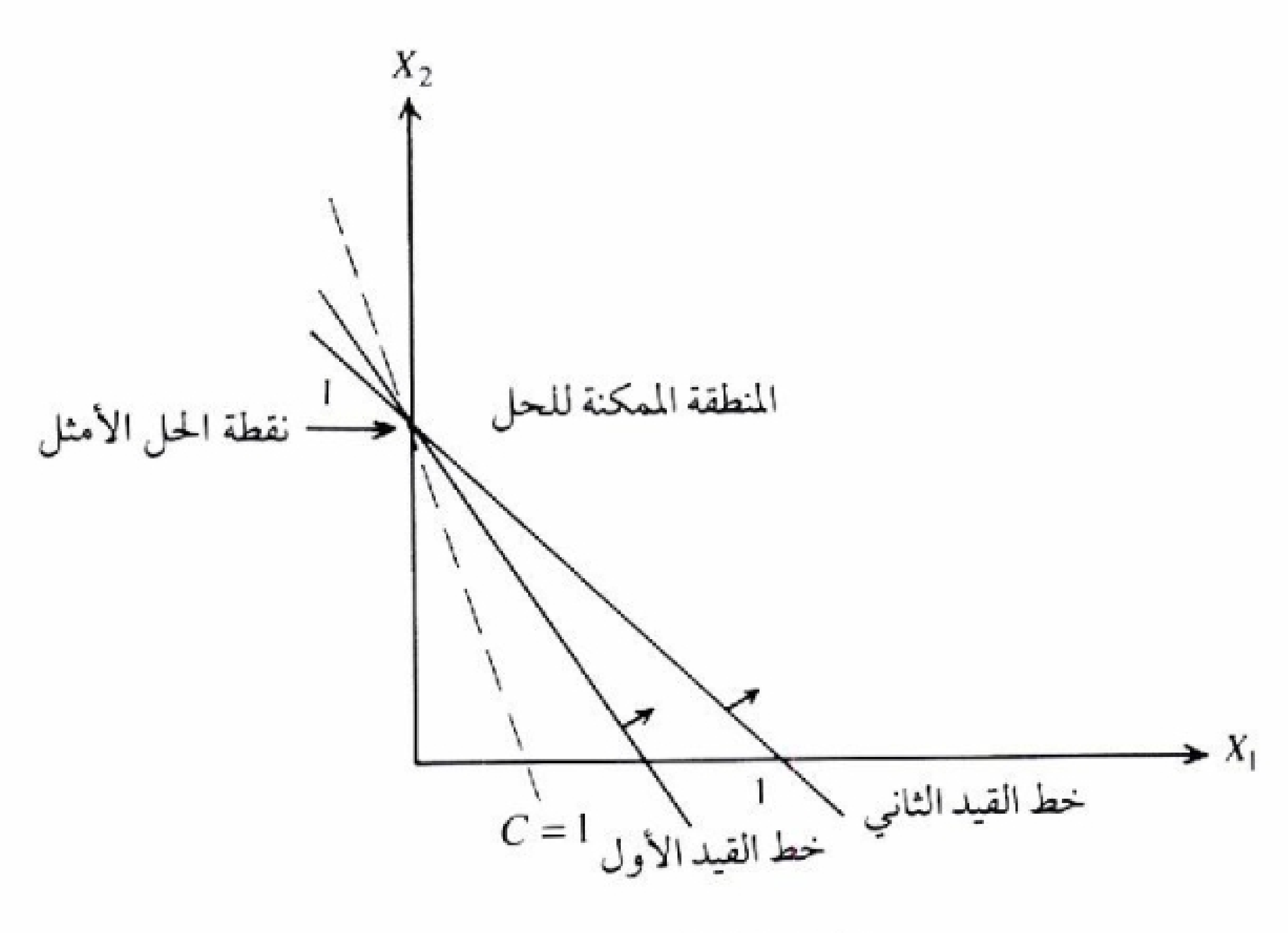
طبقا للشروط الآتية:

$$3X_1 + 2X_2 \geq 2$$

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

والتمثيل البياني لهذا البرنامج كما في الشكل الآتي:



شكل (٢)

نجد من الشكل السابق أن نقطة الحل الأمثل هي $X_2^* = 1$, $X_1^* = 0$ ، وعند هذه النقطة يتقاطع الخط الممثل للقيد الأول والخط الممثل للقيد الثاني وأيضا الخط الممثل لقيد اللاسالبية $X_2 \geq 0$.

لحل هذا البرنامج باستخدام طريقة السمبلكس نحول أولا دالة الهدف من دالة تصغير إلى دالة تكبير ونطرح من الطرف الأيسر للقيد الهيكلي الأول المتغير الزائد T_1 ونضيف له المتغير الصناعي A_1 ونطرح من الطرف الأيسر للقيد الهيكلي الثاني المتغير الزائد T_2 ونضيف له المتغير الصناعي A_2 ونحصل على البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = -3X_1 - X_2 + 0T_1 + 0T_2 - MA_1 - MA_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$3X_1 + 2X_2 - T_1 + A_1 = 2$$

$$X_1 + X_2 - T_2 + A_2 = 1$$

$$X_1 , X_2 , T_1 , T_2 , A_1 , A_2 \geq 0$$

ونعيد كتابة دالة الهدف في الصورة الصفرية كالتالي :

$$3X_1 + X_2 + 0T_1 + 0T_2 + MA_1 + MA_2 + Z = 0$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي الآتي :

معاملات دالة		3	1	0	0	M	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	T_1	T_2	A_1	A_2	الحل	الاختيار θ
M	A_1	3	2	−1	0	1	0	2	$\frac{2}{3}$
M	A_2	1	1	0	−1	0	1	1	1
الصف القياسي		$3-4M$	$1-3M$	M	M	0	0	$-3M$	

X_1 يحل محل A_1 ونحصل على جدول السمبلكس الأول الآتي :

معاملات دالة		3	1	0	0	M	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	T_1	T_2	A_1	A_2	الحل	الاختبار θ
3	X_1	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1
M	A_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1
الصف القياسي		0	$-1-\frac{M}{3}$	$1-\frac{M}{3}$	M	$-1+\frac{4M}{3}$	0	$-2-\frac{M}{3}$	

يلاحظ أن نسبة الاختبار التي تقابل المتغيرين الأساسيين متساوية، نختار A_2 كمتغير خارج ونحصل على جدول السمبلكس الثاني الآتي بإحلال X_2 محل A_2 :

معاملات دالة		3	1	0	0	M	M	عمود	نسبة
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	T_1	T_2	A_1	A_2	الحل	الاختبار θ
3	X_1	1	0	-1	2	1	-2	0	0
1	X_2	0	1	1	-3	-1	3	1	–
الصف القياسي		0	0	2	-3	-2	3	-1	

T_2 هو المتغير الداخل و X_1 هو المتغير الخارج ونحصل على جدول السمبلكس الآتي :

معاملات دالة		3	1	0	0	M	M	عمود
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	T_1	T_2	A_1	A_2	الحل
0	T_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	0
1	X_2	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1
الصف القياسي		$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$M-\frac{1}{2}$	M	-1

وحيث إنه لا يوجد في الصف القياسي أي قيمة سالبة، فإن الجدول السابق هو الجدول النهائي والحل الأمثل المقابل له هو :

$$X_1^* = 0\ ,\ X_2^* = 1\ ,\ T_1^* = 0\ ,\ T_2^* = 0\ ,\ Z^* = -C^* = -1$$

$$\therefore C^* = 1$$

وهو الحل نفسه الذي حصلنا عليه بيانيا .

تطبيقات

١ - تنتج مؤسسة ثلاثة منتجات وتستخدم ثلاثة موارد نادرة وفقا للبرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = X_1 + 5X_2 + 3X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 + 2X_2 \le 18$$

$$X_2 + X_3 \le 15$$

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \le 60$$

$$X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3 \ge 0$$

وحصلنا على جدول السمبلكس النهائي الآتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
X_2	0.5			0.5	0		9
X_3	–0.5			–0.5	1		6
S_3	2			–1	–2		12

أ) أكمل الجدول السابق ومنه حدد الحل الأمثل .

ب) أوجد التقريب التالي ومنه أوجد حلا أمثل آخر .

جـ) باستخدام التكوينة الخطية عند $\lambda = \frac{1}{2}$ ، أوجد حلا أمثل ثالثا وعلق على النتائج التي تصل إليها .

٢ - المطلوب تهيئة البرنامج الخطي الآتي لاستخدام طريقة السمبلكس :

$$\min C = 3X_1 - 2X_2 + 5X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\begin{aligned} 4X_1 + X_2 \quad &\geq 5 \\ X_2 - 5X_3 &\leq -7 \\ X_1 , X_2 , X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

٣ - كون جدول السمبلكس المبدئي والأول للبرنامج الخطي الآتي :

$$\min C = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 \quad &\geq 9 \\ X_1 \quad + 2X_3 &\leq 18 \\ 8X_2 + X_3 &= 250 \\ X_1 , X_2 , X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

٤ - للبرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 4X_1 + 20X_2 + 40X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\begin{aligned} 2X_1 + 2X_2 + 4X_3 &\leq 18 \\ 2X_2 + 2X_3 &\geq 20 \\ X_1 , X_2 , X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

حصلنا على جدول السمبلكس الآتي :

	X_1	X_2	X_3	S	T	A	
X_2	1	1	2	0.5	0	0	9
A	–2	0	–2	–1	–1	1	2
	$16+2M$	0	$2M$	$10+M$	M	0	

أ) ما هو نوع الحل الذي يبينه الجدول السابق؟

ب) سنفترض أن الطرف الأيمن للقيد الثاني عدل إلى 8 بدلا من 20 ، أوجد الحل الأمثل للبرنامج المعدل .

٥ - للبرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 20X_1 + 4X_2 + 10X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$-2X_1 + 2X_2 \geq 30$$

$$-2X_1 + 2X_3 \leq 30$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

حصلنا على جدول السمبلكس الآتي :

	X_1	X_2	X_3	S	T	A	
S	–2	0	2	1	0	0	30
X_2	–1	1	0	0	–0.5	0.5	15
	–24	0	–10	0	–2	$M+2$	

أ) أوجد المتغير الداخل ثم حدد المتغير الخارج - ماذا تلاحظ؟

ب) تبين أن القيد الآتي قد أسقط عند صياغة البرنامج :

$$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 50$$

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الجديد .

٦ - أوجد نوع الحل الذي ينتمي إليه كل برنامج من البرنامجين الآتيين :

$$\max Z = 2X_1 + 2X_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$-X_1 - X_2 \leq -4$$

$$X_1 + X_2 \leq 4 \ , X_1 \ \ , \ X_2 \geq 0$$

$$\min C = -4X_1 + 2X_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$-X_1 + X_2 \geq 2$$

$$-X_1 + X_2 \leq -1 \ , X_1 \ \ , \ X_2 \geq 0$$

وذلك باستخدام الطريقة البيانية ثم طريقة السمبلكس .

الفصل الرابع

الثنائية وأسعار الظل وتحليل الحساسية

● مقدمة ● تكوين البرنامج البديل ● حل البرنامج البديل بيانيا وتفسيره ● حل البرنامج البديل باستخدام طريقة السمبلكس ● مبدأ التكامل وتفسيره بالنسبة للمشكلة الإنتاجية ● حل البرنامج الأصلي من البرنامج البديل ● الحد الأدنى لنقص الطرف الأيمن لقيد معين والحد الأقصى لزيادته مع ثبات سعر ظله ● إمكانية إضافة متغير قراري جديد ● تأثير إضافة قيد هيكلي جديد على الحل الأمثل ● الحد الأدنى لنقص معامل متغير معين في دالة الهدف والحد الأعلي لزيادته بدون تأثر الحل الأمثل ● تطبيقات

مقدمة

من المفاهيم المهمة والأساسية في البرمجة الخطية مفهوم الثنائية ويعتمد هذا المفهوم على نظرية الثنائية التي تشير إلى أن لكل برنامج خطي يوجد برنامجا بديلا بحيث أنه إذا وُجد حل لأحد البرنامجين فإنه يوجد حل للبرنامج الآخر وتتساوى قيمة دالة الهدف للبرنامجين عند الحل الأمثل .

وسنقدم في هذا الفصل أولا كيفية تكوين البرنامج البديل وتفسير المتغيرات البديلة (أسعار الظل) ثم نعرض حل البرنامج البديل باستخدام طريقة السمبلكس . كما سنعرض مبدأ التكامل وتفسيره بالنسبة للمشكلة الإنتاجية وكيفية حل البرنامج الأصلي من البرنامج البديل مع تطبيق ذلك على مشكلة تغذية . وسنقوم أيضا بتفسير الحل الأمثل لهذه المشكلة باستخدام مبدأ التكامل ، ثم نعرض كذلك كيفية تحديد الحد الأدنى للنقص والحد الأعلى لزيادة الطرف الأيمن لقيد معين مع ثبات سعر ظله

وإمكانية إضافة متغير قراري جديد في ضوء أسعار ظل القيود الهيكلية وتكملة حل البرنامج. ويلاحظ أن الفقرتين الأخيرتين ترتبطان بأسعار الظل وتدخلان أيضا في إطار ما يسمى بتحليل الحساسية sensitivity analysis الذي يهتم بدراسة أثر التغير في أحد مؤشرات البرنامج على الحل الأمثل. ونظرا لما لتحليل الحساسية من أهمية كبيرة في اختبار صحة النموذج بعد بنائه واختبار مدى مطابقة الحل للواقع ومدى تأثره بالنسبة للتغير في المؤشرات كما أشرنا عند عرض مدخل بحوث العمليات في معالجة مشكلات الإدارة، واستكمالا لهذا الموضوع فإننا سنتناول أيضا تأثير إضافة قيد هيكلي جديد على الحل الأمثل وكذلك كيفية تحديد الحد الأدنى للنقص والحد الأعلى لزيادة معامل متغير معين في دالة الهدف بدون تأثر الحل الأمثل.

تكوين البرنامج البديل*

لكل برنامج خطي يمكن تكوين برنامج بديل مقابل. سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي الذي يتكون من دالة هدف في صورة تعظيم وقيود هيكلية في صورة أقل من أو يساوي، ويعرف هذا البرنامج بالبرنامج الأصلي the primal :

$$\max Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

طبقا للشروط الآتية:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \le b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \le b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n \le b_m$$

$$X_1 , X_2 , \ldots , X_n \ge 0$$

وبصورة مختصرة:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} C_j \; X_j$$

* يمكن تسمية البرنامج البديل the daul program بالبرنامج المرافق أو بالبرنامج الثنائي.

طبقا للشروط الآتية :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; X_j \;\leq\; b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1}$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

حيث إن C_j , b_i , a_{ij} ثوابت و X_j المتغيرات القرارية .

البرنامج البديل المقابل the dual هو :

$$\min u = b_1 \; y_1 + b_2 \; y_2 + \ldots + b_m \, y_m$$

طبقا للشروط الآتية :

$$a_{11} \; y_1 + a_{21} \; y_2 + \ldots + a_{m\,1} \; y_m \geq C_1$$

$$a_{12} \; y_1 + a_{22} \; y_2 + \ldots + a_{m2} \; y_m \geq C_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots$$

$$a_{1n} \; y_1 + a_{2n} \; y_2 + \ldots + a_{m\,n} \; y_m \geq C_n$$

$$y_1 \; , \; y_2 \; , \; \ldots \; , \; y_m \geq 0$$

وبصورة مختصرة يكون البرنامج البديل كالتالي :

$$\min \; u = \sum_{i=1}^{m} b_i \;\; y_i$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \;\; y_j \;\geq\; C_i \qquad j = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ويمكن اعتبار البرنامج (2) برنامجا أصليا وفي هذه الحالة يكون البرنامج (1) هو البرنامج البديل له .

ويلاحظ أنه إذا كانت دالة الهدف في صورة تعظيم وكان لدينا قيدا هيكليا (أو أكثر) في صورة أكبر من أو يساوي فإنه يتم تحويله للصورة أقل من أو يساوي عند إيجاد البرنامج البديل ويكون المتغير البديل المقابل لهذا القيد غير سالب . وإذا كان

لدينا قيدا هيكليا (أو أكثر) في صورة معادلة فإن المتغير البديل المقابل يكون غير محدد الإشارة unrestricted in sign ، وسنبين ذلك ببعض الأمثلة بعد تلخيص طريقة تحويل أحد البرنامجين للبرنامج الآخر .

يمكن تلخيص طريقة تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج البديل فيما يلي :

أ) إذا كانت دالة هدف البرنامج الأصلي في صورة تعظيم (تصغير) فإن دالة هدف البرنامج البديل تكون في صورة تصغير (تعظيم) .

ب) يقابل كل قيد في البرنامج الأصلي متغيرا في البرنامج البديل ، ويقابل كل قيد في البرنامج البديل متغيرا في البرنامج الأصلي .

جـ) إذا كانت دالة هدف أي من البرنامجين في صورة تعظيم ، فإن القيود الهيكلية تكون في صورة أقل من أو يساوي ، وإذا كانت دالة هدف أي من البرنامجين في صورة تصغير فإن القيود الهيكلية تكون في صورة أكبر من أو يساوي .

د) معاملات دالة الهدف في البرنامج البديل هي قيم الطرف الأيمن في البرنامج الأصلي وقيم الطرف الأيمن في البرنامج البديل هي معاملات دالة الهدف في البرنامج الأصلي .

هـ) إذا كان عدد القيود الهيكلية m وعدد المتغيرات القرارية n في البرنامج الأصلي فإن عدد القيود الهيكلية تصبح n وعدد المتغيرات القرارية تصبح m في البرنامج البديل .

و) معاملات المتغيرات في القيود الهيكلية للبرنامج البديل هي نفسها معاملات المتغيرات في القيود الهيكلية للبرنامج الأصلي مع تبديل معاملات الصفوف والأعمدة ، ويعني ذلك أن معاملات الصف رقم i في القيود الهيكلية للبرنامج الأصلي هي نفسها معاملات العمود رقم i في القيود الهيكلية للبرنامج البديل .

ويلاحظ أن بديل البرنامج البديل هو البرنامج الأصلي .

ويبين الجدول (١) العلاقة بين البرنامجين .

مثال ١

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \geq b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = b_3$$

$$X_1 \ , X_2 \ , X_3 \geq 0$$

جدول (١) العلاقة بين البرنامج الأصلي والبرنامج البديل.

		البرنامج الأصلي المتغيرات الأصلية				الطرف الأيمن	دالة الهدف للبرنامج البديل
		X_1	X_2	. . .	X_n	$\leq$	
المتغيرات البديلة البرنامج البديل	y_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	b_1	$b_1 y_1$
							+
	y_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	b_2	$b_2 y_2$
	⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	⋮	+
	⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	⋮	⋮
	⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	⋮	+
	y_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}	b_m	$b_m y_m$
الطرف الأيمن $\geq$		C_1	C_2	. . .	C_n		
دالة الهدف للبرنامج الأصلي		$C_1 X_1 + C_2 X_2 . . . + C_n X_n$					

لإيجاد البرنامج البديل للبرنامج الخطي السابق نجد أن دالة الهدف في صورة تعظيم ولذلك يجب أن تكون القيود الهيكلية في صورة أقل من أو يساوي، ولتحويل اتجاه المتباينة في القيد الثاني لصورة أقل من أو يساوي نضرب كل حد فيه في (1−) ونحصل على :

$$-a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - a_{23}X_3 \le -b_2$$

والقيد الثالث في صورة معادلة ويحل محله القيدين التاليين :

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \le b_3$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \ge b_3$$

ولتحويل اتجاه المتباينة الأخيرة إلى صورة أقل من أو يساوي نضرب كل حد فيها في (1−) ونحصل على :

$$-a_{31}X_1 - a_{32}X_2 - a_{33}X_3 \le -b_3$$

ونحصل على الصورة المعدلة للبرنامج الأصلي كالتالي :

$$\max Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

طبقًا للشروط الآتية :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \le b_1$$
$$-a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - a_{23}X_3 \le -b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \le b_3$$
$$-a_{31}X_1 - a_{32}X_2 - a_{33}X_3 \le -b_3$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

وبافتراض أن y_1, y_2, y_3^+, y_3^- هي المتغيرات البديلة المقابلة للقيود الهيكلية على الترتيب فإن البرنامج البديل يكون كالتالي :

$$\min u = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3y_3^+ - b_3y_3^-$$

طبقا للشروط الآتية :

$$a_{11}y_1 - a_{21}y_2 + a_{31}y_3^+ - a_{31}y_3^- \geq C_1$$
$$a_{12}y_1 - a_{22}y_2 + a_{32}y_3^+ - a_{32}y_3^- \geq C_2$$
$$a_{13}y_1 - a_{23}y_2 + a_{33}y_3^+ - a_{33}y_3^- \geq C_3$$
$$y_1 \ , \ y_2 \ , \ y_3^+ \ , \ y_3^- \ \geq \ 0$$

ونعيد كتابة البرنامج السابق كالتالي :

$$\min \ u = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3\left(y_3^+ - y_3^-\right)$$

طبقا للشروط الآتية :

$$a_{11}y_1 - a_{21}y_2 + a_{31}\left(y_3^+ - y_3^-\right) \geq C_1$$
$$a_{12}y_1 - a_{22}y_2 + a_{32}\left(y_3^+ - y_3^-\right) \geq C_2$$
$$a_{13}y_1 - a_{23}y_2 + a_{33}\left(y_3^+ - y_3^-\right) \geq C_3$$
$$y_1 \ , \ y_2 \ , \ y_3^+ \ , \ y_3^- \ \geq \ 0$$

وبوضع $y_3 = y_3^+ - y_3^-$ حيث y_3 غير محددة الإشارة يصير البرنامج السابق كالتالي :

$$\min \ u = b_1 \ y_1 - b_2 \ y_2 + b_3 \ y_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$a_{11} \ y_1 - a_{21} \ y_2 + a_{31} \ y_3 \geq C_1$$
$$a_{12} \ y_1 - a_{22} \ y_2 + a_{32} \ y_3 \geq C_2$$
$$a_{13} \ y_1 - a_{23} \ y_2 + a_{33} \ y_3 \geq C_3$$

حيث إن $y_1 \ , \ y_2 \geq 0$ وأن y_3 غير محددة الإشارة .

مثال ٢

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = C_1 \ X_1 + C_2 \ X_2 + C_3 \ X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 = b_2$$
$$X_1 \ , X_2 \ , X_3 \geq 0$$

نعيد كتابة المعادلتين السابقتين في صورة متباينات كالتالي :

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \leq b_1$$
$$- a_{11} X_1 - a_{12} X_2 - a_{13} X_3 \leq - b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \leq b_2$$
$$- a_{21} X_1 - a_{22} X_2 - a_{23} X_3 \leq - b_2$$

وبافتراض أن y_2^- , y_2^+ , y_1^- , y_1^+ هي المتغيرات البديلة المقابلة للقيود الهيكلية السابقة على الترتيب فإن البرنامج البديل يكون كالتالي :

$$\min \ u = b_1 y_1^+ - b_1 y_1^- + b_2 y_2^+ - b_2 y_2^-$$

طبقا للشروط الآتية :

$$a_{11} y_1^+ - a_{11} y_1^- + a_{21} y_1^+ - a_{21} y_1^- \geq C_1$$
$$a_{12} y_1^+ - a_{12} y_1^- + a_{22} y_2^+ - a_{22} y_2^- \geq C_2$$
$$a_{13} y_1^+ - a_{13} y_1^- + a_{23} y_2^+ - a_{23} y_2^- \geq C_3$$
$$y_1^+ \ , \ y_1^- \ , \ y_2^+ \ , \ y_2^- \ \geq \ 0$$

وبوضع $y_1 = y_1^+ - y_1^-$, $y_2 = y_2^+ - y_2^-$ نحصل على :

$$\min \ u = b_1 \ y_1 + b_2 \ y_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$a_{11} \ y_1 + a_{21} \ y_2 \geq C_1$$
$$a_{12} \ y_1 + a_{22} \ y_2 \geq C_2$$
$$a_{13} \ y_1 + a_{23} \ y_2 \geq C_3$$

y_2 , y_1 غير محددة الإشارة .

وبصفة عامة إذا كان لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} C_j \quad X_j$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad X_j = b_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

فإن البرنامج البديل يكون في الصورة :

$$\min \ u = \sum_{i=1}^{m} b_i \quad y_i$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \quad y_i \geq C_j$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

y_i غير محددة الإشارة لجميع قيم i .

مثال ٣

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\min \ Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 4$$

$$X_1 + 4X_2 + 3X_3 \geq 2$$

$$X_1 \ , X_2 \ , X_3 \geq 0$$

حيث إن دالة الهدف في صور ة تصغير فإن القيود الهيكلية يجب أن تكون في صورة أكبر من أو يساوي، ولتحويل القيد الأول للصورة أكبر من أو يساوي نضرب كل حد فيه في (1–) ونحصل على :

$$-X_1 - X_2 - 2X_3 \geq -4$$

ونعيد كتابة البرنامج في صورته المعدلة كالتالي :

$$\min Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$-X_1 - X_2 - 2X_3 \geq -4$$

$$X_1 + 4X_2 + 3X_3 \geq 2$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

وبفرض أن y_1 هو المتغير البديل المقابل للقيد الأول وأن y_2 هو المتغير البديل المقابل للقيد الثاني فإن البرنامج البديل يكون كالتالي :

$$\max u = -4y_1 + 2y_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$-\ y_1 + y_2 \leq 3$$

$$-\ y_1 + 4y_2 \leq 2$$

$$-2y_1 + 3y_2 \leq 5$$

$$y_1 , y_2 \geq 0$$

حل البرنامج البديل بيانيا وتفسيره

لبيان العلاقة بين حل البرنامج الأصلي والبرنامج البديل سنبدأ بالحل البياني للبرنامج البديل لمثال ١ في الفصل الثالث، وقد سبق أن أوجدنا حل البرنامج الأصلي بالطريقة البيانية وبطريقة السمبلكس .

سنعيد كتابة البرنامج الأصلي كالتالي :

$$\max Z = 90X_1 + 100X_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$5X_1 + 10X_2 \leq 160$$

$$X_1 + X_2 \leq 24$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

حيث X_1 تشير إلى عدد وحدات المنتج الأول

، X_2 تشير إلى عدد وحدات المنتج الثاني

ويقابل القيد الأول المورد الأول ويقابل القيد الثاني المورد الثاني .

البرنامج البديل هو :

$$\min C = 160y_1 + 24y_2$$

طبقا للشروط الآتية :

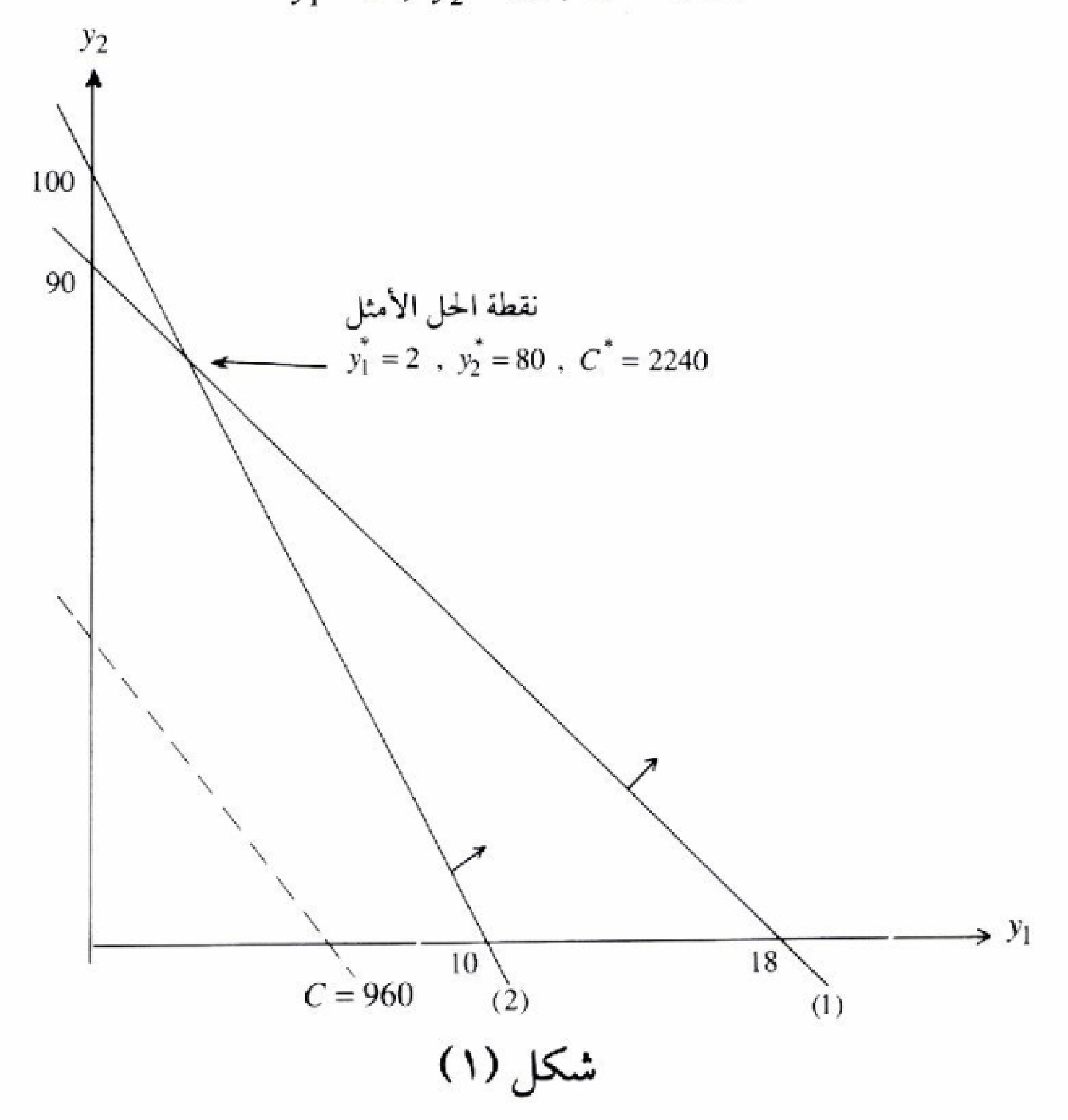
$$5y_1 + y_2 \geq 90$$

$$10y_1 + y_2 \geq 100$$

$$y_1 \ , \ y_2 \geq 0$$

والحل البياني لهذا البرنامج كما في شكل (١) حيث نجد أن :

$$y_1^* = 2 \ , \ y_2^* = 80 \ , \ C^* = 2240$$



شكل (١)

يلاحظ أن قيمة دالة الهدف للحل الأمثل للبرنامج الأصلي والبرنامج البديل متساوية وتساوي 2240 في هذا المثال، ويحدث ذلك دائما. وبصفة عامة إذا وجد حل أمثل لأحد البرنامجين، فإنه يوجد حل أمثل للبرنامج الآخر بحيث تتساوى قيمة دالة الهدف في الحلين الأمثلين كما تشير نظرية الثنائية.

ويتوقف تفسير البرنامج البديل على تفسير المتغيرات البديلة، وفي المثال الذي ندرسه سنفرض زيادة الطرف الأيمن للقيد الأول في البرنامج الأصلي بوحدة واحدة أي إننا سنفترض زيادة الكمية المتاحة من المورد الأول بوحدة واحدة ونبحث في تأثير ذلك على قيمة دالة الهدف أي على قيمة الربح. سيؤدي ذلك إلى زيادة المنطقة الممكنة للحل ولكن ستبقى نقطة الحل الأمثل ناتجة أيضا من تقاطع الخطين الممثلين للقيدين وتنتج نقطة الحل الأمثل الجديدة من حل المعادلتين:

$$5X_1 + 10X_2 = 161$$

$$X_1 + X_2 = 24$$

ونحصل على:

$$X_1^* = 15.8 \ , \ X_2^* = 8.2$$

وقيمة دالة الهدف الجديدة تساوي 2242 أي إنها زادت بمقدار 2 عن القيمة الأصلية، وتقابل هذه الزيادة المتغير الأول في البرنامج البديل عند الحل الأمثل حيث إن $y_1^* = 2$ كما في الحل البياني.

وبالمثل إذا افترضنا زيادة الطرف الأيمن للقيد الثاني بوحدة واحدة، أي إذا افترضنا زيادة الكمية المتاحة من المورد الثاني بوحدة واحدة وأعدنا حل البرنامج، فسنجد أن نقطة الحل الأمثل الجديدة تنتج من تقاطع الخطين الممثلين للقيدين وتنتج من حل المعادلتين:

$$5X_1 + 10X_2 = 160$$

$$X_1 + X_2 = 25$$

ونحصل على:

$$X_1^* = 18 \ , \ X_2^* = 7$$

وتساوي قيمة دالة الهدف الجديدة 2320، أي إنها زادت بمقدار 80 عن القيمة الأصلية، وتقابل هذه الزيادة القيمة المثلى للمتغير الثاني في البرنامج البديل حيث إن $y_2^* = 80$ كما في الحل البياني.

نستنتج من ذلك أن y_2^* ، y_1^* تمثل القيمة الحدية المرتبطة بوحدة إضافية من المورد المقابل وتسمى سعر ظل هذا المورد shadow price . وفي ضوء ذلك يمكن تفسير الطرف الأيسر في القيود الهيكلية للبرنامج البديل للمثال محل الدراسة بأنه مجموع القيمة الحدية للموارد المستخدمة في إنتاج منتج معين، ففي القيد الأول تمثل $5y_1$ القيمة الحدية للمورد الأول المستخدم لإنتاج وحدة من المنتج الأول وتمثل y_2 القيمة الحدية للمورد الثاني المستخدم في إنتاج وحدة المنتج الأول وبالمثل بالنسبة للقيد الثاني. وتعبر دالة الهدف في البرنامج البديل عن القيمة الحدية الكلية لجميع الموارد المتاحة حيث إن $160y_1$ تمثل القيمة الحدية للمتاح من المورد الأول و $24y_2$ تمثل القيمة الحدية للمتاح من المورد الثاني.

حل البرنامج البديل باستخدام طريقة السمبلكس

لإيجاد حل البرنامج البديل في المثال السابق باستخدام طريقة السمبلكس نطرح من الطرف الأيسر للقيد الأول المتغير الزائد الذي سنشير له بالرمز T_1، ونضيف المتغير الصناعي A_1، ونطرح من الطرف الأيسر للقيد الثاني المتغير الزائد T_2، ونضيف المتغير الصناعي A_2 ونحول دالة الهدف إلى دالة تعظيم وذلك لتهيئته لاستخدام طريقة السمبلكس، ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي الآتي :

		160	24	0	0	M	M	عمود
		y_1	y_2	T_1	T_2	A_1	A_2	الحل
M	A_1	5	1	-1	0	1	0	90
M	A_2	10	1	0	-1	0	1	100
		$-15M+160$	$-2M+24$	M	M	0	0	$-190M$

ونجد أن جدول السمبلكس الأول والثاني (النهائي) كالتالي :

		160	24	0	0	M	M	عمود
		y_1	y_2	T_1	T_2	A_1	A_2	الحل
M	A_1	0	0.5	−1	0.5	1	−0.5	40
160	y_2	1	0.1	0	−0.1	0	0.1	10
		0	$-0.5M+8$	M	$-0.5M+16$	0	$1.5M-16$	$-40M-1600$

		160	24	0	0	M	M	عمود
		y_1	y_2	T_1	T_2	A_1	A_2	الحل
24	y_2	0	1	−2	1	2	−1	80
160	y_1	1	0	0.2	−0.2	−0.2	0.2	2
		0	0	16	8	$-16+M$	$-8+M$	−2240

$$\therefore\ y_1^* = 2\ ,\ y_2^* = 80\ ,\ C^* = 2240\ ,\ T_1^* = 0\ ,\ T_2^* = 0$$

ويمكن الحصول على نتائج الحل الأمثل لكل من البرنامج الأصلي والبرنامج البديل من جدول السمبلكس النهائي لأي من البرنامجين، فمن جدول السمبلكس النهائي للبرنامج الأصلي في مثال (١) في الفصل الثالث يمكن تحديد قيم المتغير البديلة للمثال محل الدراسة من الصف القياسي بالنظر إلى المعاملات المقابلة للمتغيرات الإضافية S_1 , S_2، فالمعامل المقابل للمتغير S_1 هو y_1^* ويساوي 2، والمقابل للمتغير S_2 هو y_2^* ويساوي 8، كما يلاحظ أن قيم المتغيرات الفائضة S_1 , S_2 في جدول السمبلكس النهائي للبرنامج الأصلي تساوي صفرا حيث إنه لا تفيض أي كمية من المورد الأول أو المورد الثاني نتيجة تطبيق الحل الأمثل .

ومن ناحية أخرى، يمكن أن نحصل على قيم X_1^* , X_2^* من جدول السمبلكس النهائي للبرنامج البديل من المعاملات المقابلة للمتغيرات الزائدة T_1 , T_2 في الصف

القياسي، فالمعامل المقابل للمتغير T_1 هو قيمة X_1^* ويساوي 16، والمقابل للمتغير T_2 هو قيمة X_2^* ويساوي 8، ويلاحظ أن قيم المتغيرات الزائدة T_2 ، T_1 في جدول السمبلكس النهائي للبرنامج البديل تساوي صفرا، ويعنى ذلك أن القيمة الحدية للموارد المستخدمة في إنتاج كل منتج من المنتجين تساوي ربح المنتج في المثال المدروس.

ويلاحظ أن هناك بعض المشكلات التي يكون حل البرنامج البديل لها أسهل من حل البرنامج الأصلي، وطالما أن حل أي من البرنامجين يعطي حلا للبرنامج الآخر، فمن الأفضل حل البرنامج الذي يحتوي على عدد من القيود أقل من عدد المتغيرات وذلك لأن عدد تقريبات طريقة السمبلكس يعتمد بصفة أساسية على عدد القيود، ومن الأفضل حل البرنامج الذي يحتوي على عدد أقل من المتباينات التي من النوع أكبر من أو يساوي بالنسبة للمتباينات التي من النوع أقل من أو يساوي، وذلك لأن المتباينات التي من النوع أكبر من أو يساوي تتطلب استخدام متغيرات صناعية.

مبدأ التكامل Complementary Slackness وتفسيره بالنسبة للمشكلة الإنتاجية

يشير مبدأ التكامل إلى أنه عند الحل الأمثل نجد أن حاصل ضرب المتغير في الفرق بين طرفي القيد المقابل له في البرنامج البديل يساوي صفرا. ولبيان ذلك نعيد كتابة البرنامج الأصلي والبديل في الصورة العامة مع زيادة متغير إضافي للطرف الأيسر لكل قيد هيكلي للبرنامج الأصلي وطرح متغير زائد للطرف الأيسر لكل قيد هيكلي للبرنامج البديل، ونحصل على البرنامج الأصلي كالتالي:

$$\max Z = P_1 X_1 + P_2 X_2 + \ldots + P_n X_n$$

طبقا للشروط الآتية:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n + S_1 = b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n + S_2 = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n + S_m = b_m$$
$$X_1, X_2, \ldots, X_n, S_1, S_2, \ldots, S_m \geq 0$$

ونحصل على البرنامج البديل كالتالي :

$$\min C = b_1\ y_1 + b_2\ y_2 + \ldots + b_m\ y_m$$

طبقا للشروط الآتية :

$$a_{11}\ y_1 + a_{21}\ y_2 + \ldots + a_{m1}\ y_m - T_1 = P_1$$
$$a_{12}\ y_1 + a_{22}\ y_2 + \ldots + a_{m2}\ y_m - T_2 = P_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}\ y_1 + a_{2n}\ y_2 + \ldots + a_{mn}\ y_m + T_n = P_n$$
$$y_1\ , y_2\ , \ldots , y_m , T_1\ , T_2\ , \ldots , T_n \geq 0$$

سنفترض أن X متجه عمودي من الرتبة $(n \times 1)$

، P متجه صفي من الرتبة $(1 \times n)$

، A مصفوفة من الرتبة $(m \times n)$

، S متجه عمودي من الرتبة $(m \times 1)$

، b متجه عمودي من الرتبة $(m \times 1)$

، y متجه صفي من الرتبة $(1 \times m)$

، T متجه صفي من الرتبة $(1 \times n)$

بناء على ذلك نكتب البرنامج الأصلي المعدل كالتالي :

$$\max Z = PX$$

طبقا للشروط الآتية :

$$AX + S = b$$
$$S\ , X \geq 0$$

ونكتب البرنامج البديل المعدل كالتالي :

$$\min C = y\ b$$

طبقا للشروط الآتية :

$$yA - T = P$$
$$y \, , T \geq 0$$
$$C - Z = y\,b - PX$$
$$= y\,(AX + S) - (yA - T)\,X$$
$$= yAX + yS - yAX + TX = yS + TX$$

سنفترض أن X^* , T^* , S^* , y^* حلول مثلى للبرنامج الأصلي والبديل، وفي هذه الحالة نجد أن $C^* = Z^*$، وبالتالي فإن :

$$y^*\,S^* + T^*\,X^* = 0$$

وحيث إن جميع المتجهات السابقة غير سالبة ، فإن :

$$y^*\,S^* = 0 \,,\, T^*\,X^* = 0$$

أي أن :

$$S_i^*\,y_i^* = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ m$$
$$T_j^*\,X_j^* = 0 \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$$

فإذا كان $y_i^* > 0$ ، فإن $S_i^* = 0$ ، وإذا كان $X_j^* > 0$ ، فإن $T_j^* = 0$ ، أي إنه إذا كان المتغير البديل موجبا $(y_i^* > 0)$ عند الحل الأمثل، فإن المتغير الفائض المقابل في البرنامج الأصلي يساوي صفرا $(S_i^* = 0)$ ، وإذا كان المتغير الأصلي موجبا $(X_j^* > 0)$ ، فإن المتغير الزائد المقابل في البرنامج البديل يساوي صفرا $(T_j^* = 0)$.

وتفسير ذلك بالنسبة للمشكلة الإنتاجية هو أنه إذا كان سعر ظل مورد معين موجبا، فإن هذا المورد سوف يستنفد في العملية الإنتاجية نتيجة تطبيق الخطة الإنتاجية المثلى، وإذا أنتج منتج معين فإن القيمة الحدية للموارد المستخدمة في إنتاج وحدة منه تساوي معدل ربحه .

ومن ناحية أخرى، إذا كان $S_i^* > 0$ فإن $y_i^* = 0$ ، وإذا كان $T_j^* > 0$ فإن $X_j^* = 0$.

أي إنه إذا كان المتغير الفائض في البرنامج الأصلي موجبا عند الحل الأمثل، فإن المتغير البديل المقابل يساوي صفرا، وإذا كان المتغير الزائد في البرنامج البديل موجبا، فإن المتغير المقابل في البرنامج الأصلي يساوي صفرا كذلك .

وتفسير ذلك بالنسبة للمشكلة الإنتاجية أنه إذا كان هناك فائض في مورد معين نتيجة تطبيق الخطة الإنتاجية المثلى ، فإن سعر ظله يساوي صفرا ، وإذا كانت القيمة الحدية للموارد المستخدمة في إنتاج وحدة من منتج معين أكبر من معدل ربحه فإن هذا المنتج لا يتم إنتاجه .

حل البرنامج الأصلي من البرنامج البديل

يمكن استخدام مبدأ التكامل لحل البرنامج الخطي الذي يتكون من قيدين وأي عدد من المتغيرات وذلك بالطريقة البيانية لأن البرنامج البديل في هذه الحالة يحتوي على متغيرين .

مثال ٣

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 90X_1 + 100X_2 + 110X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$5X_1 + 10X_2 + 12X_3 \le 160$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \le 24$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \ge 0$$

البرنامج البديل هو :

$$\min C = 160y_1 + 24y_2$$

طبقا للشروط الآتية :

$$5y_1 + y_2 \ge 90$$

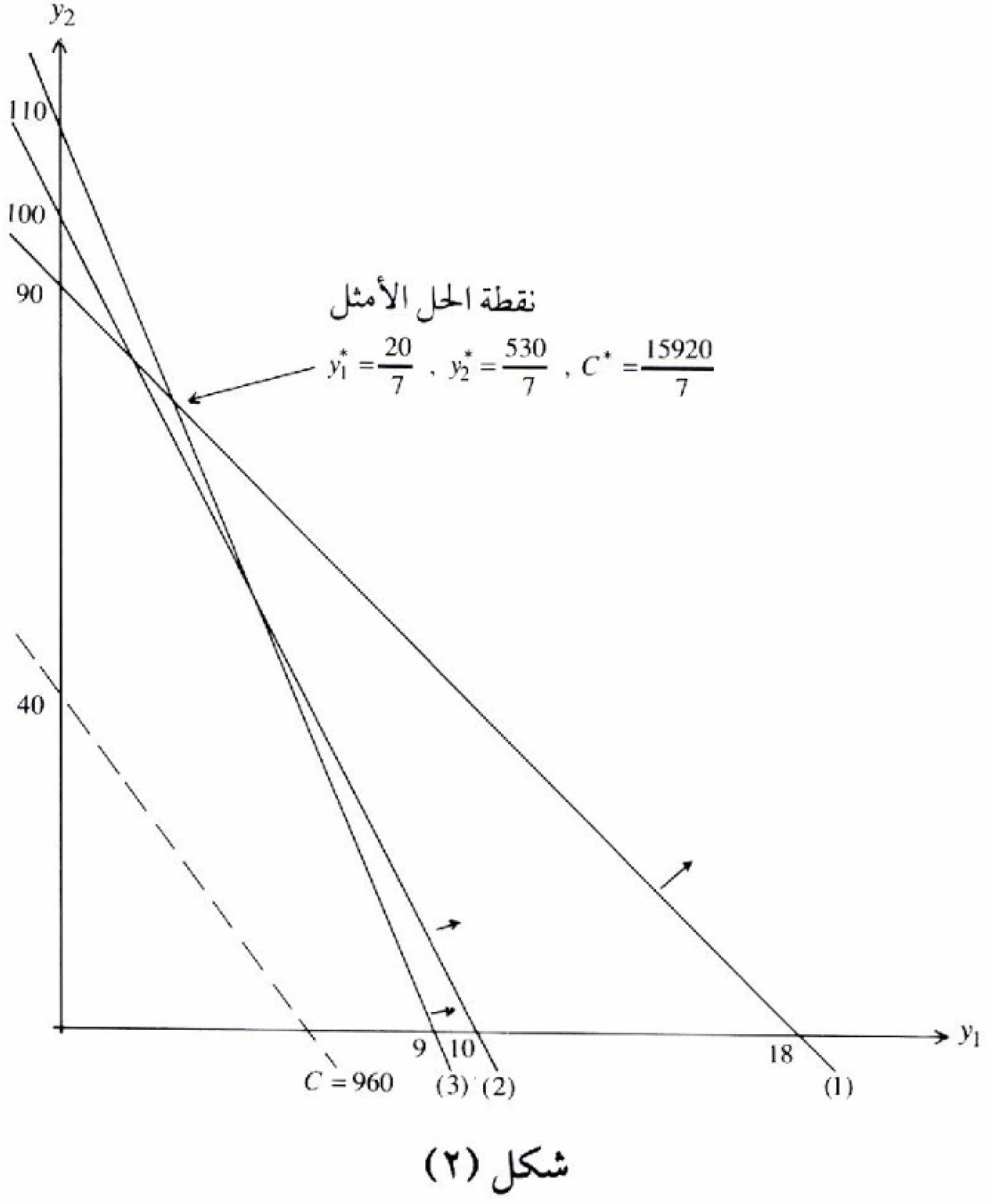
$$10y_1 + y_2 \ge 100$$

$$12y_1 + y_2 \ge 110$$

$$y_1 , y_2 \ge 0$$

يمكن حل البرنامج البديل كما في شكل (٢). ونجد أن نقطة الحل الأمثل تنتج من تقاطع خطي القيد الأول والثالث ونحصل على :

$$y_1^* = \frac{20}{7}\ ,\ y_2^* = \frac{530}{7}\ ,\ C^* = \frac{15920}{7}$$



شكل (٢)

وحيث إن $y_1^*\ ,\ y_2^* > 0$ فإن القيدين الهيكليين للبرنامج الأصلي يمكن كتابتهما في صورة معادلتين وذلك لأن $S_1^*\ ,\ S_2^* = 0$ طبقا لمبدأ التكامل.

وبالتعويض عن $y_2^* = \frac{530}{7}\ ,\ y_1^* = \frac{20}{7}$ في القيد الأول والثالث للبرنامج البديل، نجد أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن أي إن $T_3^* = 0\ ,\ T_1^* = 0$ ،

وبالتعـويض في القيـد الثـاني نجد أن الطرف الأيسـر أكبـر من الطرف الأيمن أي إن $T_2^* > 0$ وذلك يتضمن أن $X_2^* = 0$ طبقا لمبدأ التكامل.

نستنتج من ذلك أنه يمكن حل البرنامج الأصلي بحل المعادلتين:

$$5X_1 + 12X_3 = 160 ,$$

$$X_1 + X_3 = 24$$

ونجد أن:

$$X_1^* = \frac{128}{7} \ , \ X_2^* = 0 \ , \ X_3^* = \frac{40}{7} \ , \ Z^* = \frac{15920}{7} = C^*$$

ويتبين من الجدول الآتي أن حاصل ضرب المتغير الفائض في البرنامج الأصلي (S_1^*, S_2^*) في المتغير البديل المقابل (y_1^*, y_2^*) يساوي صفرا، وأن حاصل ضرب المتغير الزائد في البرنامج البديل (T_1^*, T_2^*) في المتغير الأصلي المقابل (X_1^*, X_2^*) يساوي صفرا كذلك، وذلك طبقا لمبدأ التكامل.

المتغير المقابل	المتغير الفائض أو الزائد
$y_1^* = \frac{20}{7}$	$S_1^* = 0$
$y_2^* = \frac{530}{7}$	$S_2^* = 0$
$X_1^* = \frac{128}{7}$	$T_1^* = 0$
$X_2^* = 0$	$T_2^* = \frac{30}{7}$
$X_3^* = \frac{40}{7}$	$T_3^* = 0$

مثال ٤

سنفتـرض أنه من المطلوب شراء كـمية معينة من لحوم الغنم والدجـاج والبقر بأقل ثمن ممكن بحيث تحتوي على الأقل على 6 كيلوجرام من البروتين، وبحيث لا

تزيد كمية الدهن عن 10 كيلوجرام، ولا تقل كمية الغنم عن 15 كيلوجرام، ولا تزيد كمية الماء عن 30 كيلوجرام، علما بأن نسبة وجود المادة الغذائية في الكيلوجرام الواحد من كل نوع هي كما في الجدول الآتي :

	غنم	دجاج	بقر
بروتين	0.15	0.15	0.20
دهن	0.25	0.15	0.20
ماء	0.60	0.70	0.60

وثمن كيلوجرام الغنم 12 والدجاج 8 والبقر 18 .

من المعلومات السابقة نصوغ البرنامج الخطي كالتالي حيث X_1 تشير إلى كمية الغنم وX_2 تشير إلى كميةالدجاج وX_3 تشير إلى كمية البقر :

$$\min C = 12X_1 + 8X_2 + 18X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

بروتين	(1)	$0.15X_1 + 0.15X_2 + 0.20X_3 \geq 6$
دهن	(2)	$0.25X_1 + 0.15X_2 + 0.20X_3 \leq 10$
ماء	(3)	$0.60X_1 + 0.70X_2 + 0.60X_3 \leq 30$
وزن الغنم	(4)	$X_1 \geq 15$

$$X_1 \ , X_2 \ , X_3 \geq 0$$

يلاحظ أن عدد القيود في البرنامج السابق وهو 4 أكبر من عدد المتغيرات وهو 3، ومن ناحية أخرى ستكون القيود الهيكلية للبرنامج البديل متباينات في صورة أقل من أو يساوي، وبالتالي فإننا سنستخدم المتغيرات الفائضة لتحويل المتباينات إلى معادلات لتهيئة البرنامج لاستخدام طريقة السمبلكس، بينما حل البرنامج الأصلي يتطلب استخدام المتغيرات الزائدة والمتغيرات الصناعية لتهيئته . ولذلك فإن الأفضل حل البرنامج البديل، وحيث إن دالة الهدف في صورة تصغير،

فإننا نحول اتجاه المتباينة المقابلة لقيد الدهن والماء إلى الصورة أكبر من أو يساوي وذلك بضرب كل حد من حدود كل متباينة في (1-)، ونعيد كتابة البرنامج كالتالي :

$$\min C = 12X_1 + 8X_2 + 18X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

بروتين	(5)	$0.15X_1 + 0.15X_2 + 0.20X_3 \geq 6$
دهن	(6)	$-0.25X_1 - 0.15X_2 - 0.20X_3 \geq -10$
ماء	(7)	$-0.60X_1 - 0.70X_2 - 0.60X_3 \geq -30$
وزن الغنم	(8)	$X_1 \geq 15$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

سنفترض أن y_1 ، y_2 ، y_3 ، y_4 هي المتغيرات البديلة المقابلة للقيود الهيكلية السابقة على الترتيب، فيكون البرنامج البديل كالتالي :

$$\max Z = 6y_1 - 10y_2 - 30y_3 + 15y_4$$

طبقا للشروط الآتية :

غنم	(9)	$0.15y_1 - 0.25y_2 - 0.60y_3 + y_4 \leq 12$
دجاج	(10)	$0.15y_1 - 0.15y_2 - 0.70y_3 \leq 8$
بقر	(11)	$0.20y_1 - 0.20y_2 - 0.60y_3 \leq 18$

$$y_1 , y_2 , y_3 , y_4 \geq 0$$

-لحل البرنامج السابق نكون جدول السمبلكس المبدئي كالتالي :

		–6	10	30	–15	0	0	0	عمود	نسبة
		y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	S_3	الحل	الاختبار θ
0	S_1	0.15	–0.25	–0.6	1	1	0	0	12	12
0	S_2	0.15	–0.15	–0.7	0	0	1	0	8	–
0	S_2	0.20	–0.20	–0.6	0	0	0	1	18	–
		–6	10	30	–15	0	0	0	0	

ونحصل على جدول السمبلكس الأول والثاني (النهائي) كالتالي :

		-6	10	30	-15	0	0	0	عمود	نسبة
		y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	S_3	الحل	الاختبار θ
0	y_4	0.15	–0.25	–0.6	1	1	0	0	12	80
0	S_2	0.15	–0.15	–0.7	0	0	1	0	8	$53\frac{1}{3}$
0	S_3	0.20	–0.20	–0.6	0	0	0	1	18	90
		–3.75	6.25	21	0	15	0	0	180	

جدول السمبلكس الثاني (النهائي)

y_4	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	1	–1	0	4
y_1	1	–1	$-\frac{14}{3}$	0	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{160}{3}$
S_3	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{22}{3}$
	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	15	25	0	380

ومن جدول السمبلكس النهائي نحصل على :

$$y_1^* = \frac{160}{3} \ , \ y_2^* = 0 \ , \ y_3^* = 0 \ , \ y_4^* = 4$$

وقيمة دالة الهدف تساوي 380 ، كذلك نجد أن

$$S_1^* = 0 \ , \ S_2^* = 0 \ , \ S_3^* = \frac{22}{3}$$

ومن الصف القياسي نحصل على :

$$X_1^* = 15 \ , \ X_2^* = 25 \ , \ X_3^* = 0$$

وبالتعويض في دالة الهدف للبرنامج الأصلي نحصل على :

$$12X_1^* + 8X_2^* + 18X_3^* = (12)\ (15) + (8)\ (25) = 380$$

وهي تساوي قيمة دالة الهدف للبرنامج البديل .

وبالتعويض عن X_1^*, X_2^*, X_3^* في القيود الهيكلية للبرنامج الأصلي، نجد أن قيم المتغيرات الزائدة هي :

$$T_1^* = 0 \ , \ T_2^* = 2.5 \ , \ T_3^* = 3.5 \ , \ T_4^* = 0$$

وتتبين من الجدول الآتي العلاقة بين المتغيرات الزائدة في البرنامج الأصلي $T_1^* \ , \ T_2^* \ , \ T_3^* \ , \ T_4^*$ ، والمتغيرات البديلة المقابلة $y_1^* \ , \ y_2^* \ , \ y_3^* \ , \ y_4^*$ من ناحية ، والمتغيرات الفائضة في البرنامج البديل $S_1^* \ , \ S_2^* \ , \ S_3^*$ والمتغيرات الأصلية المقابلة $X_1^* \ , \ X_2^* \ , \ X_3^*$ من ناحية أخرى .

المتغير البديل أو الأصلى المقابل	المتغير الفائض أو الزائد
$y_1^* = \frac{160}{3}$	$T_1^* = 0$
$y_2^* = 0$	$T_2^* = 2.5$
$y_3^* = 0$	$T_3^* = 3.5$
$y_4^* = 4$	$T_4^* = 0$
$X_1^* = 15$	$S_1^* = 0$
$X_2^* = 25$	$S_2^* = 0$
$X_3^* = 0$	$S_3^* = \frac{22}{3}$

ونجد أن :

$$T_i^* \ y_i^* = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$S_j^* \ X_j^* = 0 \qquad j = 1, 2, 3$$

أي إنه إذا كانت قيمة متغير في أي من العمودين موجبة ، فإن قيمة المتغير المقابل تساوي صفرا بحيث إن حاصل ضرب قيمتي المتغيرين المتقابلين يساوي صفرا .

ولتفسير الحل الأمثل لهذه المشكلة في ضوء مبدأ التكامل ، نجد أن كل قيد هيكلي في البرنامج الأصلي يقابل مادة غذائية معينة ، فبالنسبة للقيد الأول الذي

يقابل البروتين، نجد أن الطرف الأيسر يشير إلى الكمية الموجودة من البروتين في الكمية المشتراة من اللحوم المختلفة، والطرف الأيمن يشير إلى المتطلب الأدنى من البروتين، وقد وجدنا أن كمية البروتين وفقا للحل الأمثل تساوي المتطلب الأدنى منه $\left(T_1^* = 0\right)$، وأن المتغير البديل المقابل أي سعر ظل البروتين موجب $\left(y_1^* = \frac{160}{3}\right)$، ويعبر المتغير البديل في هذه الحالة أو سعر الظل عن الخفض في قيمة دالة الهدف أي في الثمن نتيجة خفض كمية البروتين بوحدة واحدة، وبالمثل بالنسبة للقيد الرابع الذي يقابل وزن الغنم.

أما بالنسبة لقيدي الدهن والماء فننظر للقيدين (3) ، (2) اللذين يقابلان القيدين (7) ، (6)، ونجد أن الطرف الأيسر يشير إلى كمية الدهن أو الماء في الكمية المشتراة، والطرف الأيمن يشير إلى المتطلب الأعلى من الدهن أو الماء، وقد وجدنا أن كمية الدهن أو الماء وفقا للحل الأمثل أقل من المتطلب الأعلى $\left(T_2^* = 2.5 \ , \ T_3^* = 3.5\right)$. وعلى ذلك فإن المتغير البديل المقابل لكل منهما أو سعر الظل يساوي صفرا $\left(y_2^* = 0 \ , \ y_3^* = 0\right)$.

وبالنسبة للبرنامج البديل تشير دالة الهدف إلى الوفر الناتج من تخفيض كمية البروتين بـ 6 كيلوجرام، مضافا إليه الوفر الناتج من تخفيض كمية الدهن بـ 10 كيلوجرام، مضافا إليه الوفر الناتج من تخفيض كمية الماء بـ 30 كيلوجرام، مضافا إليه الوفر الناتج من تخفيض كمية الغنم بـ 15 كيلوجرام، ويلاحظ أن الوفر الناتج من تخفيض كمية الدهن أو الماء يكون بالسالب لأن هذا التخفيض تترتب عليه زيادة في التكلفة لأنه يجعل القيد المقابل أكثر تقييدا.

ويشير كل قيد من القيود الهيكلية في البرنامج البديل إلى أن الوفر الذي يتحقق من تخفيض كيلوجرام من طعام معين يكون أقل من أو يساوي تكلفته. فمثلا بالنسبة للقيد (10)، وهو قيد الدجاج، نجد أن الوفر الناتج من إنقاص كيلوجرام من البروتين مضروبا في كمية البروتين في كيلوجرام الدجاج مضافا إليه الوفر الناتج من تخفيض كيلوجرام من الدهن مضروبا في كمية الدهن في كيلوجرام الدجاج مضافا إليه الوفر الناتج من تخفيض كيلوجرام من الماء مضروبا في كمية الماء في كيلوجرام

الدجاج يكون أقل من أو يساوي ثمن كيلوجرام الدجاج، وبالمثل بالنسبة لقيدي الغنم والبقر.

ومن الحل الأمثل نجد أن الوفر يساوي التكلفة في قيدي الغنم والدجاج $\left(S_1^* = 0 \ , \ S_2^* = 0\right)$، ويقل عن التكلفة في قيد البقر $\left(S_3^* = \frac{22}{3}\right)$، وأن الكمية المشتراة من الغنم والدجاج موجبة $\left(X_1^* = 15 \ , \ X_2^* = 25\right)$، ومن البقر منعدمة $\left(X_3^* = 0\right)$.

الحد الأدنى لنقص الطرف الأيمن لقيد معين والحد الأقصى لزيادته مع ثبات سعر ظله

ويعني ذلك مدى التغير في الطرف الأيمن لقيد هيكلي معين بدون أن يتغير المتغير البديل المقابل لهذا القيد. ومعرفة ذلك ضرورية في الحياة العملية، فعلى سبيل المثال، قد تتغير كمية الموارد المتاحة في مشكلة إنتاجية معينة وقد يؤدي ذلك إلى تغيير أسعار ظل هذه الموارد التي تعكس ندرتها النسبية ومقدار مساهمتها في العائد، لذلك يجب معرفة المدى الذي يمكن أن تتغير فيه هذه الموارد بالزيادة أو بالنقص بدون أن تتأثر أسعار ظلها.

مثال ٥

سنفترض أن مؤسسة تنتج ثلاثة منتجات وتستخدم ثلاثة موارد نادرة وفقا للبرنامج الخطي الآتي:

$$\max Z = 14.5X_1 + 20X_2 + 18.5X_3$$

طبقا للشروط الآتية:

$$5X_1 + 5X_2 + 5X_3 \le 110$$

$$5X_1 + 10X_2 + 5X_3 \le 180$$

$$10X_1 + 5X_2 + 5X_3 \le 200$$

$$X_1 \ , X_2 \ , X_3 \ge 0$$

وجداول السمبلكس المتتالية لهذا البرنامج كالتالي :

معاملات دالة الهدف		-14.5	-20	-18.5	0	0	0	عمود الحل	نسبة الاختبار θ
الهدف	**المتغير الأساسي**	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	5	5	5	1	0	0	110	25
0	S_2	5	10	5	0	1	0	180	18
0	S_3	10	5	5	0	0	1	200	40
صف الأدلة		-14.5	-20	-18.5	0	0	0	0	
0	S_1	2.5	0	2.5	1	-0.5	0	20	8
-20	X_2	0.5	1	0.5	0	0.1	0	18	36
0	S_3	7.5	0	2.5	0	-0.5	1	110	44
صف الأدلة		-4.5	0	-8.5	0	2	0	360	
-18.5	X_3	1	0	1	0.4	-0.2	0	8	
-20	X_2	0	1	0	-0.2	0.2	0	14	
0	S_3	5	0	0	-1	0	1	90	
صف الأدلة		4	0	0	3.4	0.3	0	428	

حيث S_1 = المتغير الفائض المقابل للقيد الهيكلي الأول

، S_2 = المتغير الفائض المقابل للقيد الهيكلي الثاني

، S_3 = المتغير الفائض المقابل للقيد الهيكلي الثالث

والحل الأمثل هو :

$$X_1^* = 0 \ , \ X_2^* = 14 \ , \ X_3^* = 8 \ , \ Z^* = 428 \ , \ S_1^* = 0 \ , \ S_2^* = 0 \ , \ S_3^* = 90$$

يتوقف أثر التغير في الطرف الأيمن لقيد معين على ما إذا كان هذا القيد في صورة أقل من أو يساوي، أو في صورة أكبر من أو يساوي، أو في صورة معادلة، كما يتوقف على ما إذا كان المتغير الفائض المقابل للقيد من النوع أقل من أو يساوي،

أو المتغير الزائد المقابل للقيد من النوع أكبر من أو يساوي يظهر في المتغيرات الأساسية المثلى في جدول السمبلكس النهائي أو لا .

التغير في الطرف الأيمن لقيد هيكلي معين في صورة أقل من أو يساوي

سنفترض أولا أن المتغير الفائض slack variable المقابل لهذا القيد لا يظهر في المتغيرات الأساسية المثلى، ولحساب أثر تغير الطرف الأيمن للقيد رقم K نضيف الكمية Δ_K لهذا الطرف ونسير في إجراءات الحل، ففي المثال محل الدراسة نجد أن القيد الأول يقابله S_1 الذي لا يظهر في عمود المتغيرات الأساسية للتقريب النهائي. سنفترض أن Δ_1 أضيفت إلى الطرف الأيمن للقيد الأول ونكون جدول السمبلكس المبدئي الآتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الحل
S_1	5	5	5	1	0	0	$110 + \Delta_1$
S_2	5	10	5	0	1	0	180
S_3	10	5	5	0	0	1	200
	−14.5	−20	−18.5	0	0	0	0

ويصير جدول السمبلكس النهائي كالتالي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الحل
X_3	1	0	1	0.4	−0.2	0	$8 + 0.4\Delta_1$
X_2	0	1	0	−0.2	0.2	0	$14 - 0.2\Delta_1$
S_3	1	0	0	−1	0	1	$90 - \Delta_1$
	4	0	0	3.4	0.3	0	$428 + 3.4\Delta_1$

وحتى تبقى المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل، يجب أن تكون قيم الطرف الأيمن في جدول السمبلكس النهائي موجبة أو تساوي صفرا، أي يجب أن تكون :

$$8 + 0.4\Delta_1 \geq 0$$

ومنها نحصل على :

$$(1) \quad \Delta_1 \geq -20,$$

$$14 - 0.2\Delta_1 \geq 0$$

ومنها نحصل على :

$$(2) \quad \Delta_1 \leq 70,$$

$$90 - \Delta_1 \geq 0$$

ومنها نحصل على :

$$(3) \quad \Delta_1 \leq 90,$$

يلاحظ أن المتباينة (2) تحقق المتباينة (3) ولكن لا يحدث العكس، وبأخذ المتباينة (1) في الاعتبار نحصل على :

$$-20 \geq \Delta_1 \leq 70$$

أي إن الطرف الأيمن للقيد الأول يمكن أن ينخفض بـ 20 وحدة ويزيد بـ 70 وحدة بدون أن تتغير المتغيرات الأساسية المثلى، وفي هذا المدى تبقى قيم المتغير البديل للقيد الأول ثابتة.

ويلاحظ أن Δ_1 يمكن حسابها مباشرة من جدول السمبلكس النهائي وذلك لأن معامل Δ_1 في عمود الحل في هذا الجدول هو المعامل المقابل في عمود S_1، ودائما نجد أن معامل Δ_K في جدول السمبلكس النهائي هو نفسه المعامل المقابل في عمود المتغير S_K، وذلك يجعلنا نحسب مدى التغير في الطرف الأيمن لقيد معين من نفس جدول السمبلكس النهائي. فعلى سبيل المثال، يمكن تحديد مدى التغير في الطرف الأيمن

للقيـد الثـاني من المثـال محل الدراسـة بأخـذ عـمـود الحل وعـمـود S_2 في جـدول السمبلكس النهائي كالتالي :

عمود الحل	S_2
8	− 0.2
14	0.2
90	0

وحتى تظل المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل يجب أن نحصل على :

$$8 - 0.2\Delta_2 \geq 0,$$
$$14 + 0.2\Delta_2 \geq 0$$

ومنها نحصل على :

$$(1) \quad \Delta_2 \leq 40,$$
$$(2) \quad \Delta_2 \geq -70$$
$$-70 \leq \Delta_2 \leq 40$$

أي إن الطـرف الأيمـن للقيـد الثـاني يمكـن أن يـتراوح بين $110 = 70 - 180$ و $220 = 40 + 180$ بدون أن تتغير المتغيرات الأساسية المثلى .

وبصفة عامة ، إذا كان b_K هو الطرف الأيمن للقيد رقم K ، و Δ_K هو التغير فيه ، و b_i^* هو الحل الأمثل المقابل للمتغير الأساسي i ، و $\hat{a}_{iK}$ هو المعامل المقابل للمتغير S_K في الصف i في جدول السمبلكس النهائي ، نكون المتباينات الآتية لكل متغير أساسي i في جدول السمبلكس النهائي :

$$\left(b_i^* + \hat{a}_{iK} \;\; \Delta_K\right) \geq 0$$

ثم نحل هذه المتبـاينات لتـحـديد الحـد الأدنى ℓ والحـد الأعلى u لـΔ_K ويكون مـدى التغير في Δ_K الذي يحقق استمرار المتغيرات الأساسية في جدول السمبلكس النهائي أي في الحل الأمثل هو $\ell \leq \Delta_K \leq u$ ، وإذا كـان المتـغيـر الفـائض المطلوب إيجاد مـدى

للقيـد الثـاني من المثـال محل الدراسـة بأخـذ عـمـود الحل وعـمـود S_2 في جـدول السمبلكس النهائي كالتالي :

عمود الحل	S_2
8	-0.2
14	0.2
90	0

وحتى تظل المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل يجب أن نحصل على :

$$8 - 0.2\Delta_2 \geq 0,$$
$$14 + 0.2\Delta_2 \geq 0$$

ومنها نحصل على :

$$(1) \quad \Delta_2 \leq 40,$$
$$(2) \quad \Delta_2 \geq -70$$
$$-70 \leq \Delta_2 \leq 40$$

أي إن الطـرف الأيمـن للقيـد الثـاني يمكـن أن يـتراوح بين $110 = 70 - 180$ و $220 = 40 + 180$ بدون أن تتغير المتغيرات الأساسية المثلى .

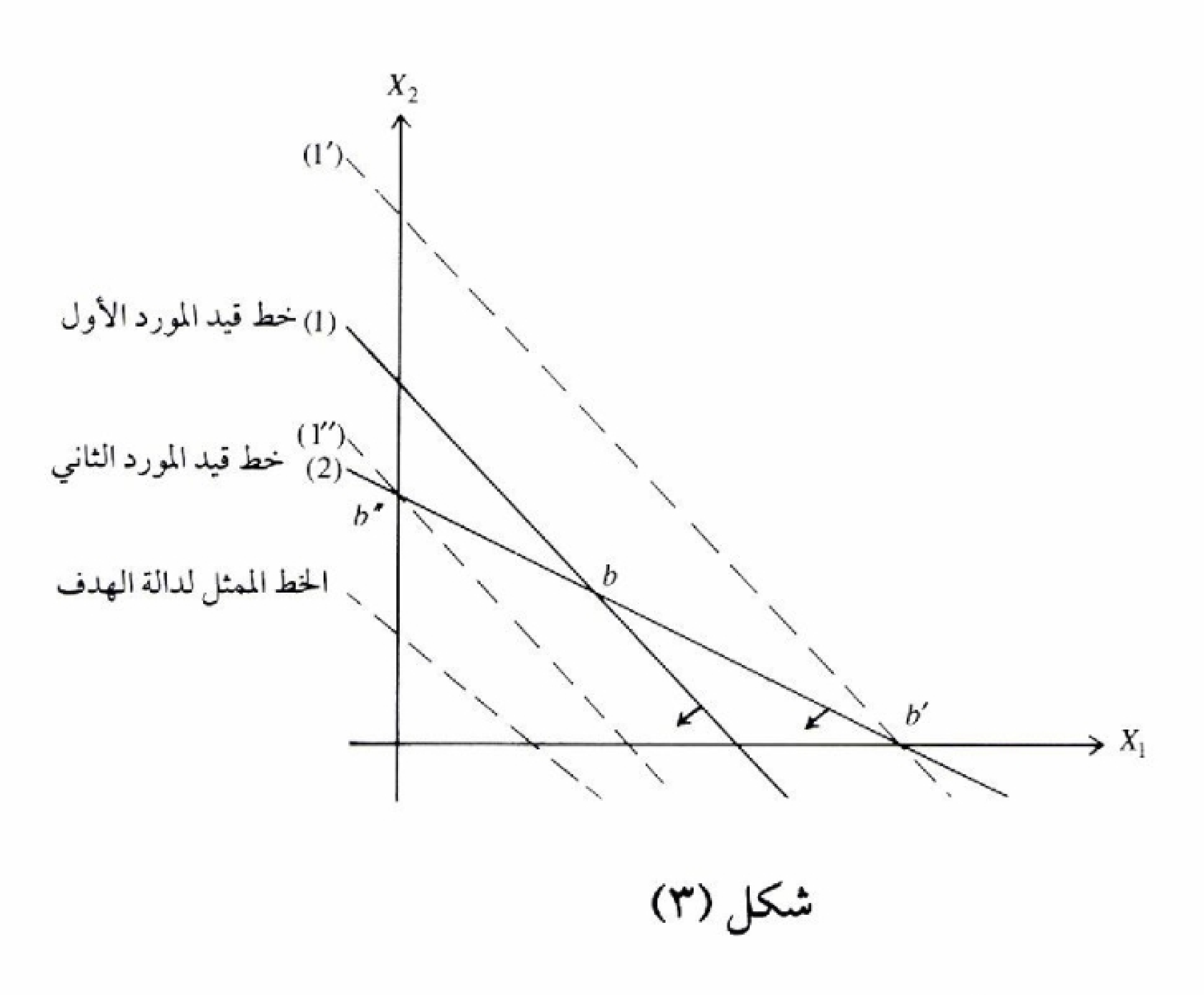
وبصفة عامة ، إذا كان b_K هو الطرف الأيمن للقيد رقم K، و Δ_K هو التغير فيه ، و b_i^* هو الحل الأمثل المقابل للمتغير الأساسي i، و $\hat{a}_{iK}$ هو المعامل المقابل للمتغير S_K في الصف i في جدول السمبلكس النهائي ، نكون المتباينات الآتية لكل متغير أساسي i في جدول السمبلكس النهائي :

$$\left(b_i^* + \hat{a}_{iK} \ \ \Delta_K\right) \geq 0$$

ثم نحل هذه المتبـاينات لتحديد الحد الأدنى ℓ والحد الأعلى u لـΔ_K ويكون مدى التغير في Δ_K الذي يحقق استمرار المتغيرات الأساسية في جدول السمبلكس النهائي أي في الحل الأمثل هو $\ell \leq \Delta_K \leq u$ ، وإذا كان المتغير الفائض المطلوب إيجاد مدى

التغير في الطرف الأيمن منه يوجد ضمن المتغيرات الأساسية المثلى، فإنه يمكن تخفيض هذا الطرف الأيمن بمقدار قيمة الحل المقابل للمتغير الفائض، ويمكن زيادة هذا الطرف إلى مالا نهاية مع ثبات سعر ظل هذا القيد. في المثال محل الدراسة نجد أن S_3 ضمن المتغيرات الأساسية المثلى وهي تساوي 90 في عمود الحل، وبالتالي فإن $-90 \leq \Delta_3 \leq \infty$، فيمكن خفض المورد الثالث حتى 110 وحدة، ويمكن زيادته إلى مالا نهاية بدون أن يتغير الحل الأمثل.

ويمكن توضيح ذلك بيانيا بأخذ المشكلة الإنتاجية التي تتكون من منتجين وموردين نادرين في صورتها العامة ونفترض أن التمثيل البياني بالنسبة لها كما في شكل (٣).



شكل (٣)

عند زيادة الطرف الأيمن للقيد (1) يتحرك الخط الممثل له في الشكل إلى أعلى موازيا لنفسه، وتكون نقطة الحل الأمثل هي نقطة تقاطع الخطين الممثلين للقيدين حتى نصل إلى نقطة $\bar{b}$ حيث يتقاطع خطا القيدين عند محور X_1، وتقابل هذه النقطة أقصى زيادة ممكنة للقيد (1) حتى يبقى المتغيران X_2 ، X_1 في الحل الأمثل وعندها يتغير

شكل المنطقة الممكنة للحل من الشكل الرباعي للمثلث ويقابل الحل الأمثل إنتاج المنتج الأول فقط، ومن ناحية أخرى وعند خفض الطرف الأيمن للقيد (1)، يتحرك الخط الممثل له إلى أسفل موازيا لنفسه وتظل نقطة الحل الأمثل هي نقطة تقاطع الخطين الممثلين للقيدين حتى نصل إلى نقطة حيث يتقاطع خطا القيدين عند محور X_2، وتقابل هذه النقطة أقل تخفيض ممكن في الطرف الأيمن للقيد الأول حتى يبقى المتغيران في الحل الأمثل. وعند هذه النقطة، يتغير أيضا شكل المنطقة الممكنة للحل من الشكل الرباعي إلى المثلث، ويتضمن الحل الأمثل إنتاج المنتج الثاني فقط، وكذلك بالنسبة للطرف الأيمن للقيد (2).

أثر تغير الطرف الأيمن لقيد هيكلي معين في صورة أكبر من أو يساوي

نلاحظ في هذه الحالة أن المتغير الذي يستخدم في تهيئة القيد من النوع أكبر من أو يساوي لاستخدام طريقة السمبلكس، أي الذي يستخدم في تحويل المتباينة إلى معادلة، هو المتغير الزائد surplus variable الذي يطرح من الطرف الأيسر للمتباينة مع إضافة المتغير الصناعي artificial variable، فإذا كان المتغير الزائد المقابل للقيد رقم K هو T_K غير أساسي في جدول السمبلكس النهائي، و b_i^* هو الحل الأمثل المقابل للمتغير الأساسي i، و $\hat{a}_{iK}$ هو المعامل المقابل للمتغير T_K في الصف i، فإن الحل الأمثل في جدول السمبلكس النهائي للبرنامج بعد إضافة Δ_K للطرف الأيمن للقيد K هو:

$$b_i^* - \hat{a}_{iK} \ \ \Delta_K$$

وذلك لكل متغير أساسي i. وحتى تبقى المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل يجب أن يكون:

$$b_i^* - \hat{a}_{iK} \ \ \Delta_K \geq 0$$

وإذا كان المتغير الزائد المقابل للقيد ضمن المتغيرات الأساسية المثلى، فإن الحد الأدنى لنقص الطرف الأيمن هو $-\infty$، والحد الأعلى هو الطرف الأيمن مضافا إليه قيمة المتغير الزائد في الحل الأمثل. فعلى سبيل المثال، إذا كان الطرف الأيمن مستوى معينا من الطلب على منتج معين يجب إشباعه، وكان الطرف الأيسر هو كمية إنتاج هذا المنتج، وكان هناك إنتاج زائد من هذا المنتج عن الطلب عليه في الحل الأمثل، فإن

نقص هذا الطلب إلى أي حد لا يؤثر على الحل الأمثل . ومن ناحية أخرى يمكن زيادة هذا المستوى بمقدار الإنتاج الزائد دون أن تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل .

أثر تغير الطرف الأيمن لقيد هيكلي في صورة معادلة

سنفترض أن A_K هو المتغير الصناعي الذي يستخدم لتهيئة المعادلة K لاستخدام طريقة السمبلكس ، وأن b_i^* هو الحل الأمثل المقابل للمتغير الأساسي رقم i ، و $\hat{a}_{iK}$ هو المعامل المقابل للمتغير A_K في الصف i في جدول السمبلكس النهائي ، فإذا أضفنا Δ_K للطرف الأيمن للقيد K فإن الحل الأمثل يصبح كالتالي :

$$b_i^* + \hat{a}_{iK} \ \ \Delta_K$$

وذلك لكل متغير أساسي i، وحتى تبقى المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل يجب أن يكون :

$$\left(b_i^* + \hat{a}_{iK} \ \ \Delta_K\right) \geq 0$$

ومن المعروف كما ذكرنا من قبل أن المتغير الصناعي لا يظهر في جدول السمبلكس النهائي كمتغير أساسي إلا إذا كان البرنامج الخطي بدون منطقة ممكنة للحل .

مثال ٦

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 30X_1 + 20X_2 + 40X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 100$$

$$4X_2 + 2X_3 \geq 50$$

$$-5X_1 + 5X_3 \geq 20$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 20$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

بافتراض أن :

S = المتغير الفائض المقابل للقيد الأول

T_1 = المتغير الزائد المقابل للقيد الثاني

T_2 = المتغير الزائد المقابل للقيد الثالث

A = المتغير الصناعي المقابل للقيد الرابع

نجد أن جدول السمبلكس النهائي* كالتالي :

المتغيرات الأساسية	X_1	X_2	X_3	S	T_1	T_2	A	عمود الحل
X_2	−1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	−1	5
X_3	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	2	15
S	−3	0	0	1	−1	0	−6	30
T_2	15	0	0	0	$\frac{5}{2}$	1	10	55
	30	0	0	0	10	0	$M+60$	700

لتحديد التغير المسموح به في الطرف الأيمن للقيد الأول، نلاحظ أن S متغير أساسي في جدول السمبلكس النهائي السابق، ولذلك فإنه يمكن تخفيض الطرف الأيمن لهذا القيد بمقدار القيمة المقابلة لـ S في عمود الحل وهي 30 ويمكن زيادته إلى مالا نهاية.

ولتحديد التغير المسموح به في الطرف الأيمن للقيد الثاني، وسنشير له بالرمز Δ_2، نلاحظ أن T_1 لا يوجد ضمن المتغيرات المثلى، ونوجد Δ_2 في هذه الحالة بحل

---

* لم نذكر المتغيرين الصناعيين المقابلين للقيد الثاني والثالث لأنهما لا يستخدمان في تحديد التغير المسموح به في الطرف الأيمن للقيدين المذكورين.

المتباينات الآتية :

$$5+\frac{1}{2}\Delta_2 \geq 0 \qquad \therefore \Delta_2 \geq -10 ,$$

$$15-\frac{1}{2}\Delta_2 \geq 0 \qquad \therefore \Delta_2 \leq 30 ,$$

$$15+\Delta_2 \geq 0 \qquad \therefore \Delta_2 \geq -30 ,$$

$$55-\frac{5}{2}\Delta_2 \geq 0 \qquad \therefore \Delta_2 \leq 22 .$$

ومعنى ذلك أنه يمكن تخفيض الطرف الأيمن للقيد الثاني بمقدار 10 وحدات ويمكن زيادته بمقدار 22 وحدة ، أي إن الطرف الأيمن لهذا القيد يمكن أن يتراوح بين 40 و 72 وحدة بدون أن تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل .

ولتحديد التغير المسموح به في الطرف الأيمن للقيد الثالث نلاحظ أن المتغير الزائد المقابل وهو T_2 متغير أساسي في جدول السمبلكس النهائي ، فيمكن تخفيض الطرف الأيمن لهذا القيد إلى ما لا نهاية ، ويمكن زيادته بمقدار القيمة المثلى لـ T_2 أي بمقدار 55 وحدة .

ولتحديد التغير المسموح به في الطرف الأيمن للقيد الرابع ، نلاحظ أن المتغير الصناعي المقابل هو A ، فإذا أشرنا إلى هذا التغير بالرمز Δ_4 فإنه يمكن إيجاده من المتباينات الآتية :

$$5-\Delta_4 \geq 0 \qquad \therefore \Delta_4 \leq 5 ,$$

$$15+2\Delta_4 \geq 0 \qquad \therefore \Delta_4 \geq -7.5 ,$$

$$30-6\Delta_4 \geq 0 \qquad \therefore \Delta_4 \leq 5 ,$$

$$55+10\Delta_4 \geq 0 \qquad \therefore \Delta_4 \geq -5.5$$

نستنتج من ذلك أنه يمكن تخفيض الطرف الأيمن للقيد الرابع بمقدار 5.5 وحدة ، ويمكن زيادته بمقدار 5 وحدات ، فيصير الحد الأدنى له 14.5 وحدة ، والحد الأقصى 25 وحدة ، بدون أن تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل .

إمكانية إضافة متغير قراري جديد

سنفترض إمكانية إضافة متغير قراري جديد للبرنامج الخطي محل الدراسة، في هذه الحالة يمكن الاستفادة من المعلومات الموجودة في جدول السمبلكس النهائي في بيان ما إذا كان هذا المتغير سيحسن من قيمة دالة الهدف، فيتم إيجاد معاملات الاستبدال المقابلة له في جدول السمبلكس النهائي، ونكون التقريب أو التقريبات التالية التي تؤدي إلى الحل الأمثل الجديد.

مثال ٧

سنفترض في مثال ٥ أنه يمكن إنتاج منتج رابع تحتاج الوحدة منه إلى 4 وحدات من المورد الأول و 8 وحدات من المورد الثاني و 10 وحدات من المورد الثالث، وأن ربح هذا المنتج 18 وحدة نقدية. بناء على ذلك نصوغ البرنامج المعدل كالتالي:

$$\max Z = 14.5X_1 + 20X_2 + 18.5X_3 + 18X_4$$

طبقا للشروط الآتية:

$$5X_1 + 5X_2 + 5X_3 + 4X_4 \le 110$$

$$5X_1 + 10X_2 + 5X_3 + 8X_4 \le 180$$

$$10X_1 + 5X_2 + 5X_3 + 10X_4 \le 200$$

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ , X_4 \ge 0$$

في البرنامج الخطي قبل التعديل نجد من الصف القياسي لجدول السمبلكس النهائي أن المتغيرات البديلة المقابلة لقيود البرنامج، أي أسعار ظل الموارد الثلاثة المستخدمة في العملية الإنتاجية هي:

$$y_1^* = 3.4 \ , \ y_2^* = 0.3 \ , \ y_3^* = 0$$

وبالتالي، فإن القيمة الحدية للموارد المستخدمةفي إنتاج الوحدة من المنتج الرابع هي:

$$(3.4)(4) + (0.3)(8) = 16$$

وحيث إن معدل ربح هذا المنتج 18، فإنه من الأفضل إنتاجه، ولإيجاد الحل الأمثل للبرنامج المعدل نكون العمود المقابل للمتغير الرابع في جدول السمبلكس النهائي بأن

نظر إلى أعمدة S_3 ، S_2 ، S_1(التي تمثل في هذه الحالة المتغيرات الفائضة التي تقابل المورد الأول والثاني والثالث) وبالنسبة لكل صف (يقابل متغيرا أساسيا معينا) نوجد مجموع حاصل ضرب معاملات الاستبدال للمتغير الجديد (حاجة الوحدة من المنتج الرابع من كل مورد) في معامل المتغير الفائض المقابل كما هو مبين بالجدول الآتي :

معامل استبدال المتغير الجديد × معامل المتغير الفائض الجديد	S_3	S_2	S_1	الصف
(0.4) (4) + (–0.2) (8) + (0) (10) = 0	0	–0.2	0.4	1
(–0.2) (4) + (0.2) (8) + (0) (10) = 0.8	0	0.2	–0.2	2
(–1) (4) + (0) (8) + (1) (10) = 6	1	0	–1	3

ويصبح جدول السمبلكس المعدل كالتالي :

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	عمود الحل	θ
X_3	1	0	1	0	0.4	–0.2	0	8	–
X_2	0	1	0	0.8	–0.2	0.2	0	14	17.5
S_3	5	0	0	6	–1	0	1	90	15
	4	0	0	–2	3.4	0.3	0	428	

وبجعل X_4 متغيرا داخلا و S_3 متغيرا خارجا ، نحصل على جدول السمبلكس الآتي :

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	عمود الحل
X_3	1	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	8
X_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{15}$	2
X_4	$\frac{5}{6}$	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	15
	$\frac{17}{3}$	0	0	0	$\frac{46}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	458

والجدول السابق هو الجدول النهائي، ومنه نجد أن :

$$X_1^* = 0 \ , \ X_2^* = 2 \ , \ X_3^* = 8 \ , \quad X_4^* = 15$$

$$S_1^* = 0 \ , \ S_2^* = 0 \ , \ S_3^* = 0 \ ,$$

$$y_1^* = \frac{46}{15} \ , \ y_2^* = \frac{3}{10} \ , \ y_3^* = \frac{1}{3}$$

وقيمة دالة الهدف تساوي 458، ويعني ذلك أن إدخال المنتج الرابع في الخطة الإنتاجية سيؤدي إلى زيادة الربح بمقدار 30 وحدة نقدية.

يلاحظ في المثال السابق أن القيود الهيكلية في صورة أقل من أو يساوي، وبالتالي فإن المتغيرات الإضافية extra variables التي استخدمت لتهيئة البرنامج لاستخدام طريقة السمبلكس هي المتغيرات الفائضة.

وفي حالة القيد الهيكلي الذي في صورة معادلة، يستخدم عمود المتغير الصناعي المقابل بنفس الطريقة التي يستخدم بها عمود المتغير الفائض لإيجاد معامل الاستبدال الجديد. وفي حالة القيد الهيكلي الذي في صورة متباينة من النوع أكبر من أو يساوي، يجب تغيير إشارة معامل المتغير الجديد قبل الحصول على حواصل ضرب عمود المتغير الزائد المقابل.

ولبيان ذلك سنستعين بالمثال الآتي :

مثال ٨

سنفترض أن لدينا البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 20X_1 + 15X_2 + 10X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$4X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 100$$

$$2X_1 \qquad + 4X_3 \geq 50$$

$$5X_1 - 5X_2 \qquad \geq 20$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 20$$

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ \geq \ 0$$

وقد وجد أن جدول السمبلكس النهائي * كالتالي :

	X_1	X_2	X_3	S	T_1	T_2	A	عمود الحل
X_3	0	–1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	–1	5
X_1	1	2	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2	15
S	0	–3	0	1	–1	0	–6	30
T_2	0	15	0	0	$\frac{5}{2}$	1	10	55
	0	15	0	0	5	0	$M+30$	350

حيث S = المتغير الفائض المقابل للقيد الأول

، T_1 = المتغير الزائد المقابل للقيد الثاني

، T_2 = المتغير الزائد المقابل للقيد الثالث

، A = المتغير الصناعي المقابل للقيد الرابع

الحل الأمثل المقابل للجدول السابق هو

$$X_1^* = 15\ ,\ X_2^* = 0\ ,\ X_3^* = 5\ ,\ S^* = 30\ ,\ T_1^* = 0\ ,\ T_2^* = 55$$

وقيمة دالة الهدف تساوي 350 .

سنفترض إمكانية إضافة متغير رابع للبرنامج الخطي السابق معامله في دالة الهدف 12 ، ومعامل الاستبدال لهذا المتغير المقابل للقيد الأول 5، والمقابل للقيد الثاني 4، والمقابل للقيد الثالث 5، والمقابل للقيد الرابع 1 .

---

* لم نذكر المتغيرين الصناعيين المقابلين للقيد الثاني والثالث لأنهما لا يستخدمان في تحديد إمكانية إضافة المتغير الجديد .

ولإيجاد معامل الاستبدال للمتغير الرابع المقابل لكل صف في جدول السمبلكس النهائي نحسب :

معامل الاستبدال المقابل للقيد الأول مضروبا في معامل المتغير الإضافي S مطروحا منه معامل الاستبدال المقابل للقيد الثاني مضروبا في معامل المتغير الزائد T_1 مطروحا منه معامل الاستبدال المقابل للقيد الثالث مضروبا في معامل المتغير الزائد T_2 مضافا إليه معامل الاستبدال المقابل للقيد الرابع مضروبا في معامل المتغير الصناعي A وبتطبيق ذلك نجد أن معامل الاستبدال الجديد للمتغير الرابع في الصف الأول يساوي :

$$(5\times 0)-\left(4\times -\frac{1}{2}\right)-(5\times 0)+(1\times -1)=1$$

وفي الصف الثاني يساوي :

$$(5\times 0)-\left(4\times \frac{1}{2}\right)-(5\times 0)+(1\times 2)=0$$

وفي الصف الثالث يساوي :

$$(5\times 1)-(4\times -1)-(5\times 0)+(1\times -6)=3$$

وفي الصف الرابع يساوي :

$$(5\times 0)-\left(4\times \frac{5}{2}\right)-(5\times 1)+(1\times 10)=-5$$

وبناء على ذلك نكون جدول السمبلكس المعدل كالتالي :

	X_1	X_2	X_3	X_4	S	T_1	T_2	A	عمود الحل	نسبة الاختبار
X_3	0	−1	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	−1	5	5
X_1	1	2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2	15	–
S	0	−3	0	3	1	−1	0	−6	30	10
T_2	0	15	0	−5	0	$\frac{5}{2}$	1	10	55	–
	0	15	0	−2	0	5	0	$M+30$	350	

وبإحلال X_4 محل X_3 (المتغير الخارج)، نحصل على جدول السمبلكس الآتي :

	X_1	X_2	X_3	X_4	S	T_1	T_2	A	عمود الحل
X_4	0	−1	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	−1	5
X_1	1	2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2	15
S	0	0	−3	3	1	$\frac{1}{2}$	0	−3	15
T_2	0	10	5	−5	0	$\frac{5}{2}$	1	5	80
	0	13	2	0	0	4	0	$M+28$	360

والجدول السابق هو الجدول النهائي ومنه نحصل على الحل الأمثل الآتي :

$$X_1^* = 15\ ,\ X_2^* = 0\ ,\ X_3^* = 0\ ,\ X_4^* = 5\ ,\ S^* = 40\ ,\ T_1^* = 0\ ,\ T_2^* = 55$$

وقيمة دالة الهدف تساوي 360 أي إنها زادت بمقدار عشر وحدات بالنسبة لقيمة دالة الهدف في البرنامج قبل التعديل.

تأثير إضافة قيد هيكلي جديد على الحل الأمثل

سنفترض إضافة قيد هيكلي جديد للمشكلة الإنتاجية محل الدراسة في مثال (٥)، ويقابل هذا القيد موردا إنتاجيا معينا الكمية المتاحة منه 90 وحدة بحيث إنه لإنتاج وحدة من المنتج الأول والثاني والثالث يلزم أربع وحدات وخمس وحدات ووحدتان من هذا المورد على الترتيب، أي إن القيد الجديد يكون في الصورة الآتية :

$$4X_1 + 5X_2 + 2X_3 \le 90$$

نجد أن إضافة هذا القيد يتطلب إضافة صف وعمود إضافي يقابل المتغير الفائض S_4 الذي يمثل كمية المورد الرابع غير المستخدم بحيث إن العمود الإضافي سيحتوي على واحد صحيح في الصف المقابل لـ S_4، وصفر في باقي الصفوف.

ولتحديد بقية المعاملات في الصف المقابل لـ S_4، نجد أن معاملات الصف الجديد المقابلة للأعمدة X_2 , X_3 , S_3 تساوي صفرا لأن هذه المتغيرات أساسية، ولذلك نحتاج فقط لإيجاد قيم الأعمدة المقابلة للمتغيرات غير الأساسية S_2, S_1 , X_1، وتعبر معاملات التبادل الناتجة عن كمية المورد الرابع اللازم لإنتاج وحدة إضافية من المنتج الأول أو المورد الأول غير المستخدم أو المورد الثاني غير المستخدم.

نكون أولا جدول السمبلكس المؤقت الآتي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	عمود الحل
X_3	1	0	1	0.4	–0.2	0	0	8
X_2	0	1	0	–0.2	0.2	0	0	14
S_3	5	0	0	–1	0	1	0	90
S_4	4	5	2	0	0	0	1	90

يلاحظ أن معاملات الصف S_4 المقابلة لـ X_2 و X_3 يجب أن تساوي صفرا لأن X_2 و X_3 متغيران أساسيان. ولتحويل المعاملات في صف S_4 المقابلة لـ X_2 و X_3 إلى أصفار، نكون الجدول الآتي:

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	عمود الحل
	4	5	2	0	0	0	1	90
$-2 \times$	1	0	1	0.4	–0.2	0	0	8
$-5 \times$	0	1	0	–0.2	0.2	0	0	14
	2	0	0	0.2	–0.6	0	1	4

في الجدول السابق ضربنا معاملات الصف المقابل لـ X_3 في 2-، والصف المقابل لـ X_2 في 5-، وجمعنا الناتج على معاملات الصف المقابل لـ S_4.

نكون الآن جدول السمبلكس في صورته الصحيحة كالتالي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	عمود الحل
X_3	1	0	1	0.4	–0.2	0	0	8
X_2	0	1	0	–0.2	0.2	0	0	14
S_3	5	0	0	–1	0	1	0	90
S_4	2	0	0	0.2	–0.6	0	1	4
	4	0	0	3.4	0.3	0	0	428

يلاحظ أن إضافة القيد الرابع للبرنامج السابق لم تغير الخطة الإنتاجية المثلى. فإذا افترضنا أن المتاح من المورد الرابع هو 80 وحدة، فإننا نحصل على جدول السمبلكس التالي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	عمود الحل
X_3	1	0	1	0.4	–0.2	0	0	8
X_2	0	1	0	–0.2	0.2	0	0	14
S_3	0	0	0	–1	0	1	0	90
S_4	2	0	0	0.2	–0.6	0	1	–6

وحيث إن القيمة في عمود الحل المقابلة لـ S_4 سالبة، لذلك نختار S_4 متغيرا خارجا ونقسم هذه القيمة على المعاملات المقابلة للمتغيرات غير الأساسية، ونختار المتغير

المقابل لأقل نسبة غير سالبة كمتغير داخل. وحيث إن النسبة الوحيدة الموجبة هي المقابلة لـ S_2، فيكون S_2 متغير داخلا ونحصل على جدول السمبلكس الآتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	عمود الحل
X_3	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	10
X_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{2}{15}$	0	0	$\frac{1}{3}$	12
S_3	5	0	0	-1	0	1	0	90
S_2	$-\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{5}{3}$	10
	5	0	0	$\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	425

والجدول السابق هو الجدول النهائي. وللتأكد من صحة الحل الأمثل الناتج من هذا الجدول، نكون دالة الهدف للبرنامج البديل كالتالي :

$$110y_1^* + 180y_2^* + 200y_3^* + 80y_4^*$$

$$= (110)\left(\frac{7}{2}\right) + (80)\left(\frac{1}{2}\right) = 425$$

وهي تساوي قيمة دالة الهدف للبرنامج الأصلي .

الحد الأدنى لنقص معامل متغير معين في دالة الهدف والحد الأعلى لزيادته بدون تأثر الحل الأمثل

يعتمد مدى تغير معامل متغير قراري معين في دالة الهدف على كون هذا المتغير أساسيا أو غير أساسي، وسنتناول كل حالة على حدة .

أثر تغير معامل متغير غير أساسي في دالة الهدف

يمكن دراسة هذا الأثر بإضافة الكمية Δ_K لمعامل المتغير غير الأساسي X_K في دالة الهدف. فإذا أشرنا إلى هذا المعامل بالرمز P_K، فإنه يصبح $P'_K = P_K + \Delta_K$ ، ونحصل في هذه الحالة على معامل الصف القياسي المقابل للمتغير X_K في جدول السمبلكس النهائي كالتالي :

$I_K - \Delta_K$، حيث I_K هو المعامل في الصف القياسي في جدول السمبلكس النهائي قبل التعديل. وحتى تظل المتغيرات الأساسية في جدول السمبلكس النهائي بدون تغيير، يجب أن يكون: $(I_K - \Delta_K) > 0$ أي يجب أن يكون $\Delta_K < I_K$.

ومعنى ذلك أن المتغير غير الأساسي X_K يدخل في الحل الأمثل إذا زاد معامله في دالة الهدف بمقدار القيمة المقابلة لهذا المتغير في الصف القياسي، ومن ناحية أخرى لا يؤثر نقص معامل هذا المتغير على الحل الأمثل.

مثال ٨

سنفترض في مثال ٥ أن مدير المؤسسة يرغب في إدخال المنتج الأول ضمن خطته الإنتاجية المثلى، فما هي الزيادة في معدل ربح هذا المنتج لتحقيق ذلك؟

بإضافة Δ_1 إلى معامل المتغير X_1 في دالة الهدف الأصلية، وهو 14.5، نحصل على جدول السمبلكس النهائي المعدل كالتالي :

معاملات دالة		$-14.5-\Delta_1$	-20	-18.5	0	0	0	عمود
الهدف	المتغير الأساسي	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
−18.5	X_3	1	0	1	0.4	−0.2	0	8
−20	X_2	0	1	0	−0.2	0.2	0	14
0	S_3	1	0	0	−1	0	1	90
الصف القياسي		$4-\Delta_1$	0	0	3.4	0.3	0	428

ولإدخال المنتج الأول في الخطة الإنتاجية، يجب أن يكون:

$$4 - \Delta_1 \leq 0$$

أي يجب أن يكون $\Delta_1 \geq 4$، ويعني ذلك أنه إذا زاد معدل ربح المنتج الأول بأربعة وحدات نقدية، فإنه يدخل ضمن الخطة الإنتاجية المثلى.

أثر تغير معامل متغير أساسي في دالة الهدف

سنفترض زيادة معامل دالة الهدف P_K للمتغير الأساسي X_K ليصبح $P'_K = P_K + \Delta_K$، ثم نعيد إيجاد جدول السمبلكس النهائي مع أخذ هذا التغير في الاعتبار، فنجد أن عناصر الصف القياسي المقابلة للمتغيرات غير الأساسية تكون دالة في Δ_K، سنفترض أن العنصر المقابل للمتغير غير الأساسي X_g هو I'_g، والمطلوب تحديد المدى الذي يمكن أن تتحرك فيه Δ_K بحيث يظل الحل الأمثل كما هو، أي بحيث يكون $I'_g > 0$ وذلك لكل متغير غير أساسي X_g. ويمكن بيان ذلك بالاستعانة بالمثال محل الدراسة. فنعيد كتابة جدول السمبلكس النهائي مع أخذ زيادة معامل المتغير X_3 في الاعتبار كالتالي:

		-14.5	-20	$-18.5-\Delta_3$	0	0	0	عمود
	المتغير الأساسي	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
$-18.5-\Delta_3$	X_3	1	0	1	0.4	-0.2	0	8
-20	X_2	0	1	0	-0.2	0.2	0	14
0	S_3	1	0	0	-1	0	1	90
الصف القياسي		$4+\Delta_3$	0	0	$3.4+0.4\Delta_3$	$0.3-0.2\Delta_3$	0	$428+8\Delta_3$

وحتى تستمر المتغيرات الأساسية S_3 ، X_3 ، X_2 في الحل الأمثل، يجب أن تكون

المعاملات المقابلة لكل منها في الصف القياسي أكبر من أو تساوي صفرا، أي يجب أن تكون :

$$4 + \Delta_3 \geq 0$$

$$(1) \quad \therefore \ \Delta_3 \geq -4,$$

$$3.4 + 0.4\Delta_3 \geq 0$$

$$(2) \quad \therefore \ \Delta_3 \geq -8.5,$$

$$0.3 - 0.2\Delta_3 \geq 0$$

$$(3) \quad \therefore \ \Delta_3 \leq 1.5$$

المتباينة (1) تحقق المتباينة (2)، ولكن المتباينة (2) لا تحقق المتباينة (1) وذلك لأن 4- أقرب للصفر من 8.5-، ومع أخذ المتباينة (3) في الاعتبار نحصل على: $-4 \leq \Delta_3 \leq 1.5$، أي إن معدل ربح المنتج الثالث يمكن أن يتراوح بين $18.5 - 4 = 14.5$ و $18.5 + 1.5 = 20$ بدون أن تتغير نقطة الحل الأمثل.

وبصفة عامة، إذا كانت لدينا مجموعة من المتباينات على الصورة $\Delta_K \geq -g_j$، فإن الشرط المقابل لقيمة $-g_j$ الأقرب للصفر هو الذي يستخدم لتحديد مقدار النقص الذي يمكن أن يحدث في معامل دالة الهدف لمتغير معين بحيث يظل هذا المتغير في المتغيرات الأساسية المثلى. وإذا كان $\Delta_K \leq h_j$، فإن الشرط المقابل لقيمة h_j الأقرب للصفر هو الذي يستخدم لتحديد مقدار الزيادة الذي يمكن أن يحدث في معامل دالة الهدف لمتغير معين بحيث يظل في المتغيرات الأساسية المثلى. فإذا وقع معامل دالة الهدف لمتغير معين خارج المدى المسموح به، نعيد كتابة جدول السمبلكس النهائي مع أخذ المعامل الجديد في الاعتبار ونستمر في الحل حتى نحصل على الحل الأمثل.

فإذا افترضنا على سبيل المثال أن معدل ربح المنتج الثالث أصبح 25، نحصل على جدول السمبلكس الآتي حيث نجد أن قيمة دالة الهدف زادت إلى480 ، وأن معامل الصف القياسي المقابل للمتغير S_2 سالب، أي أن هذا التقريب ليس هو التقريب النهائي. ويمكن تحسين قيمة دالة الهدف بإدخال S_2 في المتغيرات الأساسية ليحل محل X_2 في هذا التقريب، ونستمر في الحل حتى نصل إلى التقريب النهائي.

		-14.5	-20	-25	0	0	0	عمود
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
-25	X_3	1	0	1	0.4	-0.2	0	8
-20	X_2	0	1	0	-0.2	0.2	0	14
0	S_3	1	0	0	-1	0	1	90
		10.5	0	0	6	-1	0	480

ولإيضاح ذلك بيانيا نفترض أن الصورة العامة للبرنامج الخطي لمشكلة إنتاجية مكونة من منتجين وموردين نادرين كالتالي :

$$\max P_1X_1 + P_2X_2$$

طبقا للشروط الآتية :

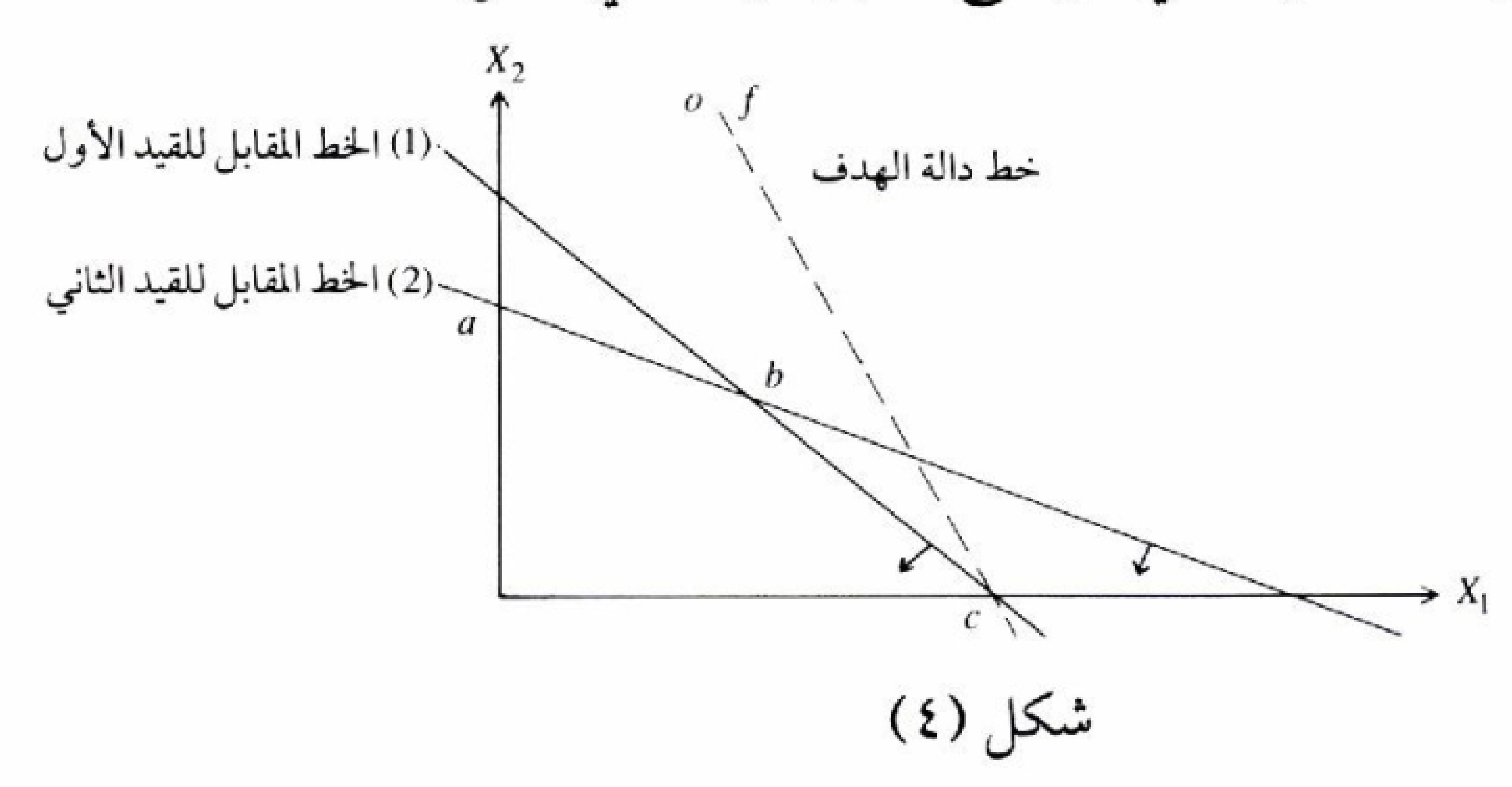
$$(1) \qquad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1$$

$$(2) \qquad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2$$

$$X_1 \ , X_2 \geq 0$$

حيث تشير $X_1 \ , X_2$ إلى كمية المنتج الأول والثاني، و $P_1 \ , P_2$ تشير إلى معدل الربح، و $b_1 \ , b_2$ تشير إلى كمية المتاح من المورد الأول والثاني، و a_{ij} تشير إلى كمية المورد اللازم لإنتاج وحدة واحدة من المنتج j $(i, j = 1,2)$.

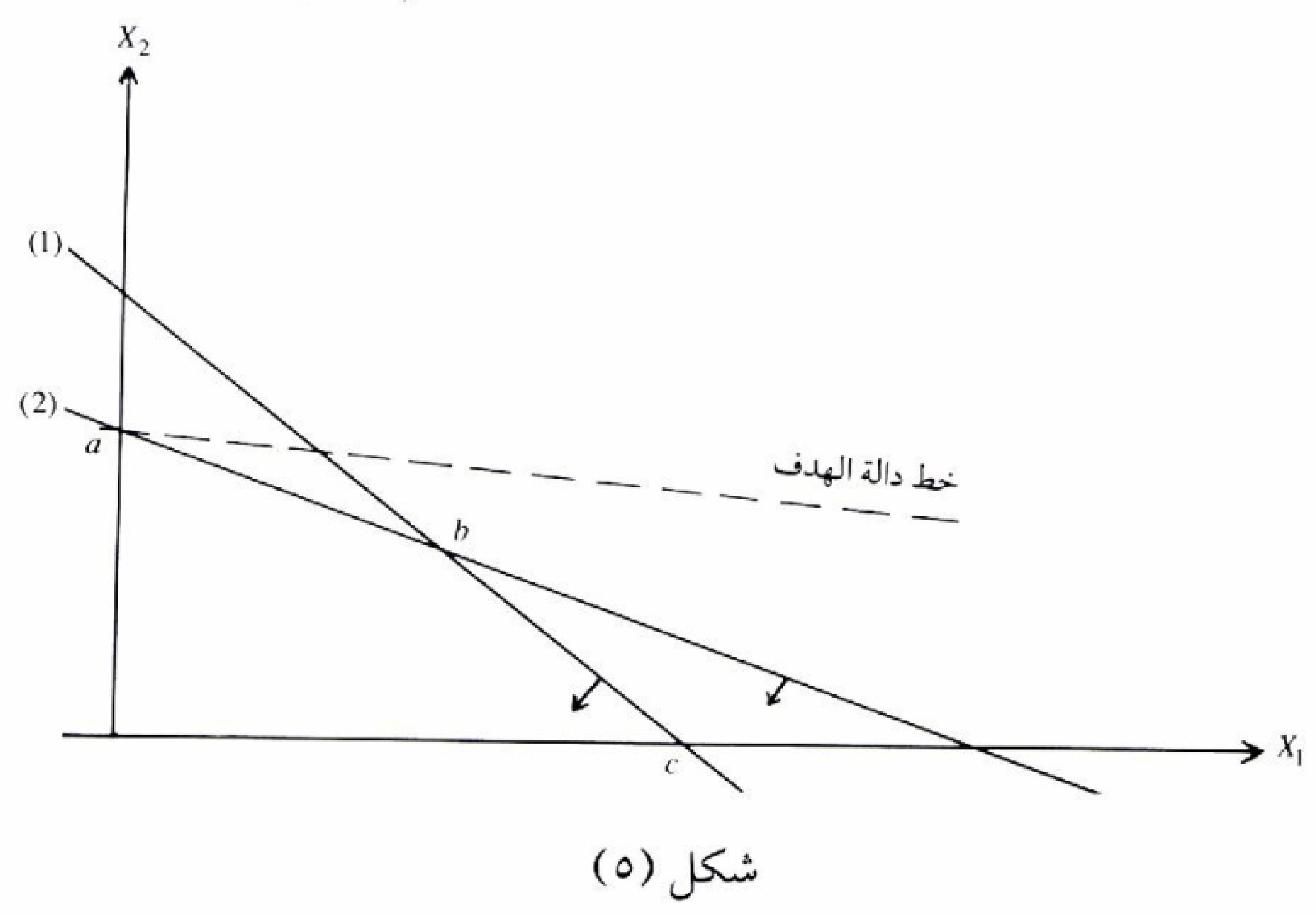
سنفترض أن التمثيل البياني للبرنامج السابق هو كما في شكل (٤) .



شكل (٤)

من شكل (٤)، X_1 متغير أساسي و X_2 متغير غير أساسي طبقا لخط دالة الهدف o.f، وحتى يصبح X_2 متغيرا أساسيا يجب زيادة معامله في دالة الهدف حتى يصبح ميل خط دالة الهدف مساويا لميل خط القيد (1) أو أقل منه، فإذا أصبح ميل خط دالة الهدف مساويا لميل خط القيد (1) نحصل على حلول مثلى متعددة (من النقطتين b, c وجميع النقط بينهما التي يمكن إيجادها بجميع التكوينات الخطية المحدبة الممكنة منهما)، وإذا أصبح ميل خط دالة الهدف أقل من ميل خط القيد (1) (وأكبر من ميل خط القيد 2) نحصل على حل أمثل واحد يكون فيه كل من X_2 , X_1 متغيرا أساسيا.

من ناحية أخرى سنفترض أن خط دالة الهدف كما في شكل (٥).



شكل (٥)

من شكل (٥)، X_2 متغير أساسي و X_1 متغير غير أساسي، وحتى يصبح X_1 متغيرا أساسيا يجب زيادة معامله في دالة الهدف حتى يصبح ميل الخط الممثل لها مساويا لميل خط القيد (2)، فإذا تساوى ميل خط دالة الهدف مع ميل خط القيد (2) نحصل على حلول مثلى متعددة (من النقطتين b , a وجميع النقط بينهما)، وإذا أصبح ميل خط دالة الهدف أكبر من ميل خط القيد (2) (وأقل من ميل خط القيد 1) يصبح كل من X_2 , X_1 متغيرين أساسيين ويتم إنتاج المنتجين.

تطبيقات

١ - صغ البرنامج البديل لكل من البرنامجين الخطيين الآتيين :

$$\max Z = 8X_1 + 7X_2 + 10X_3 + 6X_4$$

طبقا للشروط الآتية :

$$4X_1 + 2X_3 + 2X_4 \geq 5$$
$$3X_2 + X_4 \leq 4$$
$$X_3 - X_4 = 20$$
$$X_1 \geq 8$$
$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ , \ X_4 \ \geq \ 0$$

$$\min C = 3X_1 + 2X_2 - X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$5X_1 + X_2 \leq 24$$
$$3X_2 + 4X_3 \geq 27$$
$$2X_1 + 7X_3 = 36$$
$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ \geq \ 0$$

٢ - بالاستعانة بالبرنامج البديل والطريقة البيانية، أوجد قرار الإنتاج الأمثل وأسعار الظل وقيمة الربح للبرنامج الخطي الآتي الذي يمثل مشكلة إنتاجية :

$$\max Z = 8X_1 + 10X_2 + 6X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

المورد الأول $8X_1 + 12X_2 + 10X_3 \leq 116$

المورد الثاني $24X_1 + 18X_2 + 20X_3 \leq 320$

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ \geq \ 0$$

٣ - تنتج مؤسسة ثلاثة منتجات، وتستخدم موردين نادرين A,B . فإذا كان ربح المنتج الأول 18، والمنتج الثاني 16، والمنتج الثالث 14، ولإنتاج وحدة من

المنتج الأول يلزم 8 وحدات من A، و 5 وحدات من B، ولإنتاج وحدة من المنتج الثاني يلزم 4 وحدات من A، و 6 وحدات من B ، ولإنتاج وحدة من المنتج الثالث يلزم 10 وحدات من A و 8 وحدات من B، وكانت الكمية المتاحة من A هي 120 ومن B هي 80 .

أ) صغ البرنامج الخطي للمشكلة السابقة .

ب) كون البرنامج البديل وأوجد حله بيانيا .

(جـ) ما هو أقصى مبلغ يمكن دفعه مقابل وحدة إضافية من A ووحدة إضافية من B؟

د) أوجد المتغيرات الزائدة المثلى في البرنامج البديل .

هـ) استخدم مبدأ التكامل لتحديد أي من المتغيرات الأصلية والفائضة في البرنامج الأصلي تساوي صفرا ثم أوجد جبريا الحل الأمثل للبرنامج الأصلي .

و) سنفترض إمكانية إنتاج منتج رابع معدل ربحه 24، ولإنتاج وحدة منه يلزم 12 وحدة من A و 4 وحدات من B، فهل تنتج المؤسسة هذا المنتج الجديد؟

٤ - تنتج مؤسسة ثلاثة منتجات وتستخدم ثلاثة موارد نادرة وفقا للبرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 12X_1 + 16X_2 + 8X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$2X_1 + 4X_2 \leq 36$$

$$2X_2 + 2X_3 \leq 30$$

$$6X_1 + 8X_2 + 4X_3 \leq 120$$

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \geq 0$$

وحصلنا على جدول السمبلكس النهائي الآتي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الحل
X_2				0.375	0.25	–0.125	6
X_3				–0.375	0.25	0.125	9
X_1				–0.25	–0.5	0.25	6

أ) أوجد البرنامج البديل .

ب) أكمل الجدول السابق ومنه أوجد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي والبديل .

جـ) فسر الحل الأمثل للبرنامج الأصلي والبديل في ضوء مبدأ التكامل وأسعار الظل .

د) هل يمكن إيجاد حلول مثلى متعددة لهذا البرنامج؟ ولماذا؟

٥ - عند معالجة أحد المواقف الإدارية ، حصلنا على البرنامج الخطي الآتي :

$$\max Z = 8X_1 + 10X_2 + 7X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$6X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 150$$

$$8X_1 + 12X_2 + 6X_3 \leq 120$$

$$X_2 \geq 5$$

$$X_1 \; , \; X_2 \; , \; X_3 \; \geq \; 0$$

ووجد أن جدول السمبلكس النهائي كالتالي :

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	T	A	عمود الحل
S_1	–0.67				–0.83	–6	6	80
X_3	1.33				$\frac{1}{6}$	2	–2	10
X_2	0				0	–1	1	5

والمطلوب :

أ) تكملة الجدول السابق .

ب) تحديد القيم المثلى للمتغيرات الأصلية .

جـ) تحديد فائض كل قيد وسعر ظله وبيان العلاقة بينهما .

د) إيجاد الحد الأدنى والأعلى لنقص وزيادة معامل المتغير X_1 والمتغير X_3 في دالة الهدف بدون تغير الحل الأمثل .

هـ) إيجاد الحد الأدنى والأعلى لنقص وزيادة الطرف الأيمن لكل من القيد الأول والقيد الثالث بدون أن يتأثر سعر ظل كل منهما .

٦ - أمكن صياغة البرنامج الخطي لأحد مشاكل التغذية كالتالي :

$$\min C = 14X_1 + 8X_2 + 20X_3$$

طبقا للشروط الآتية :

F	المواد الدهنية	$0.25X_1 + 0.15X_2 + 0.20X_3 \leq 2$
P	المواد البروتينية	$0.15X_1 + 0.15X_2 + 0.20X_3 \geq 1.5$
W	الماء	$0.6X_1 + 0.7X_2 + 0.6X_3 \leq 6$

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ \geq \ 0$$

وحصلنا على جدول السمبلكس النهائي الآتي :

	X_1	X_2	X_3	S_F	S_W	T_P	A_P	عمود الحل
S_F	0.1				0	1	−1	0.5
X_2	0.6				4	12	−12	6
X_3	0.3				−3	−14	14	3

أ) أكمل الجدول السابق ومنه اوجد الحل الأمثل لهذه المشكلة .

ب) هل يمكن توليد حلول مثلى متعددة لهذا البرنامج؟ ولماذا؟

جـ) كـون البـرنامج البـديل ، وهل من الأفـضـل حل المشكلة باسـتـخـدام البرنامج الأصلي أو البرنامج البديل؟ ولماذا؟

د) أوجد الحد الأدنى والأعلى لنقص وزيادة الطرف الأيمن لكل من القيد الأول والقيد الثالث بدون أن يتأثر سعر ظل كل منهما .

هـ) أوجد الحد الأدنى والأعلى لنقص وزيادة معامل كل من المتغير X_1 والمتغير X_3 بدون أن يتأثر الحل الأمثل للبرنامج .

الفصل الخامس

مشكلة النقل ومشكلة التعيين

Transportation Problem & Assignment Problem

● صياغة مشكلة النقل ● حل مشكلة النقل ● البرنامج البديل لمشكلة النقل ● حالات خاصة لمشكلة النقل ● صياغة مشكلة التعيين ● حل مشكلة التعيين ● حالات خاصة لمشكلة التعيين ● تطبيقات

صياغة مشكلة النقل

تعتبر مشكلة النقل أحد التطبيقات المهمة في البرمجة الخطية وتهدف أساسا إلى تخفيض التكلفة الكلية لنقل المواد الخام أو المنتجات من مناطق الإنتاج origins أو المصانع إلى مراكز التوزيع destinations أو الأسواق وذلك بطريقة تضمن تغطية حاجات المراكز من ناحية كما تضمن أن كل منطقة إنتاجية توزع إنتاجها من ناحية أخرى.

سنفترض أن لدينا مراكز توزيع عددها n، ومناطق إنتاجية عددها m، وأن C_{ij} تمثل تكلفة نقل الوحدة (أو معدل تكلفة النقل) من المنطقة الإنتاجية i إلى مركز التوزيع j، وأن X_{ij} تمثل الكمية التي يمكن نقلها من المنطقة i للمركز j، وأن A_i تمثل الطاقة الإنتاجية للمنطقة i، وأن B_j تمثل الطاقة الاستيعابية للمركز j.

من ذلك يمكن أن نكون ما يعرف بجدول النقل الآتي :

مراكز التوزيع / مناطق الإنتاج	1	2	.	j	.	n	العرض
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	. .	C_{1j} X_{1j}	.	C_{1n} X_{1n}	A_1
1	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	. .	C_{2j} X_{2j}	.	C_{2n} X_{2n}	A_2
.	.	.	.	.	.	.	.
i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	. .	C_{ij} X_{ij}	.	C_{in} X_{in}	A_i
.	.	.	.	.	.	.	.
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	. .	C_{mj} X_{mj}	.	C_{mn} X_{mn}	A_m
الطلب	B_1	B_2	.	B_j	.	B_n	

وتصبح المشكلة إيجاد قيم X_{ij} حيث

$$i = 1, 2, ..., m \text{ ، } j = 1, 2, ..., n$$

التي تصغر الدالة

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \quad X_{ij}$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = A_i \ , \quad i = 1, \ 2, \ . \ . \ ., \ m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = B_j \ , \quad j = 1, \ 2, \ . \ . \ ., \ n$$

$$X_{ij} \geq 0 \ , \qquad i = 1, \ 2, \ . \ . \ ., \ m$$

$$j = 1, \ 2, \ . \ . \ ., \ n$$

من ذلك يمكن أن نكون ما يعرف بجدول النقل الآتي :

مراكز التوزيع / مناطق الإنتاج	1	2	.	j	.	n	العرض
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	. .	C_{1j} X_{1j}	.	C_{1n} X_{1n}	A_1
1	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	. .	C_{2j} X_{2j}	.	C_{2n} X_{2n}	A_2
.	.	.	.	.	.	.	.
i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	. .	C_{ij} X_{ij}	.	C_{in} X_{in}	A_i
.	.	.	.	.	.	.	.
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	. .	C_{mj} X_{mj}	.	C_{mn} X_{mn}	A_m
الطلب	B_1	B_2	.	B_j	.	B_n	

وتصبح المشكلة إيجاد قيم X_{ij} حيث

$$i = 1, 2, ..., m \text{ ، } j = 1, 2, ..., n$$

التي تصغر الدالة

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \quad X_{ij}$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = A_i \ , \quad i = 1, \ 2, \ . \ . \ ., \ m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = B_j \ , \quad j = 1, \ 2, \ . \ . \ ., \ n$$

$$X_{ij} \geq 0 \ , \qquad i = 1, \ 2, \ . \ . \ ., \ m$$

$$j = 1, \ 2, \ . \ . \ ., \ n$$

ويلاحظ أن الصياغة السابقة لا تتضمن أن حجم العرض الكلي يساوي حجم الطلب الكلي أي لا تتضمن أن :

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

ولا ينطبق ذلك على المواقف العملية بصفة عامة حيث لا يتساوى العرض مع الطلب، ويتطلب حل البرنامج باستخدام طريقة النقل تساوي العرض والطلب، فإذا كان العرض أكبر من الطلب أي إنه إذا كان :

$$\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$$

نكون مركز توزيع وهمي طاقته الاستيعابية تساوي زيادة العرض على الطلب، ومن ناحية أخرى إذا كان العرض أقل من الطلب أي إنه إذا كان :

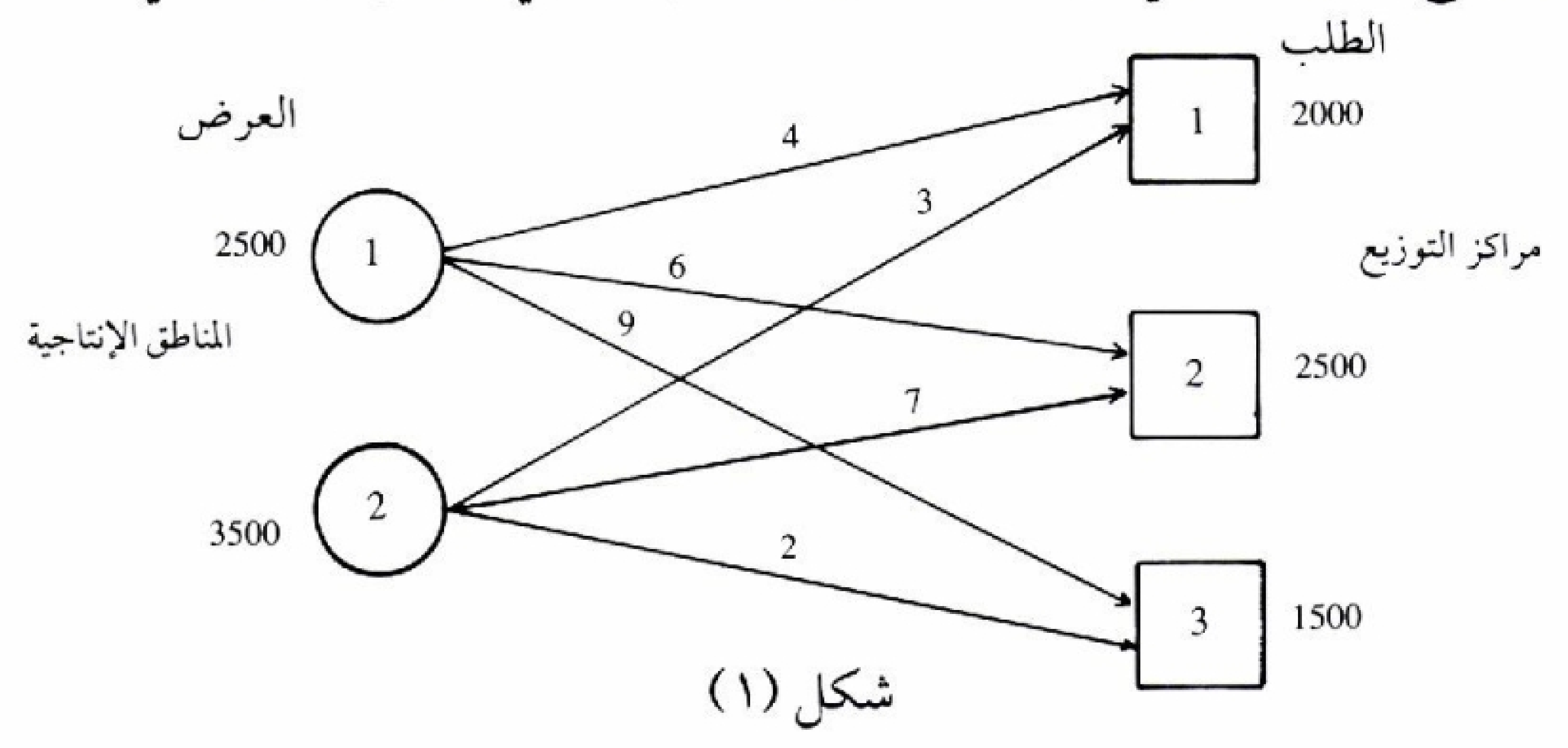
$$\sum_{i=1}^{m} A_i < \sum_{j=1}^{n} B_j$$

نكون منطقة إنتاجية وهمية طاقتها الإنتاجية تساوي زيادة الطلب على العرض ونضع التكلفة المقابلة لمركز التوزيع الوهمي أو للمنطقة الإنتاجية الوهمية مساوية للصفر .

مثال ١

سنفترض أن لدينا منطقتين إنتاجيتين وثلاثة مراكز للتوزيع وأن الطاقة الإنتاجية للمنطقة الأولى 2500 وللثانية 3500، وأن الطاقة الاستيعابية للسوق الأول 2000 وللثاني 2500 وللثالث 1500، وأن معدل تكلفة النقل من المنطقة الإنتاجية الأولى لمركز التوزيع الأول 4 والثاني 6 والثالث 9 ومن المنطقة الإنتاجية الثانية لمركز

التوزيع الأول 3 والثاني 7 والثالث 2. ويمكن تمثيل ذلك في الشكل المبسط الآتي:



شكل (١)

(تشير الأرقام فوق الأسهم إلى معدل تكلفة النقل من منطقة إنتاجية إلى مركز توزيع معين).

ويكون جدول النقل كالتالي:

إلي / من	1	2	3	العرض
1	4	6	9	2500
2	3	7	2	3500
الطلب	2000	2500	1500	6000

ولتكوين البرنامج الخطي للمشكلة السابقة سنفترض أن X_{ij} هي الكميات المنقولة من المنطقة الإنتاجية i حيث $i = 1, 2$ إلى مركز التوزيع j حيث $j = 1, 2, 3$، ويكون المطلوب هو إيجاد قيم X_{ij} التي تصغر الدالة:

$$C = 4X_{11} + 6X_{12} + 9X_{13} + 3X_{21} + 7X_{22} + 2X_{23}$$

طبقا للشروط الآتية :

$$
\begin{array}{llllllll}
X_{11} + & X_{12} + & X_{13} & & & & = 2500 \\
 & & & X_{21} + & X_{22} + & X_{23} & = 3500 \\
X_{11} + & & & X_{21} & & & = 2000 \\
 & X_{12} + & & & X_{22} & & = 2500 \\
 & & X_{13} + & & & X_{23} & = 1500 \\
X_{11}, & X_{12}, & X_{13}, & X_{21}, & X_{22}, & X_{23} & \geq 0
\end{array}
$$

تشير دالة الهدف في البرنامج السابق إلى مجموع تكلفة النقل من المنطقتين الإنتاجيتين إلى مراكز التوزيع الثلاثة .

ويشير القيد الهيكلي الأول وهو يقابل المنطقة الإنتاجية الأولي إلى أن مجموع الكميات المنقولة من هذه المنطقة إلي مركز التوزيع الأول والثاني والثالث يساوي الطاقة الإنتاجية لهذه المنطقة . ويشير القيد الهيكلي الثاني وهو يقابل المنطقة الإنتاجية الثانية إلى أن مجموع الكميات المنقولة من هذه المنطقة إلى مراكز التوزيع الثلاثة يساوي الطاقة الإنتاجية لهذه المنطقة . ويشير القيد الهيكلي الثالث وهو يقابل مركز التوزيع الأول إلى أن مجموع الكميات المنقولة إلى هذا المركز من المنطقة الإنتاجية الأولى والثانية يساوي الطاقة الاستيعابية أو الطلب لهذا المركز . كذلك الأمر بالنسبة للقيد الهيكلي الرابع وهو يقابل مركز التوزيع الثاني فهو يشير إلى أن مجموع الكميات المنقولة إلى هذا المركز من المنطقة الإنتاجية الأولى والثانية يساوي الطاقة الاستيعابية أو الطلب لهذا المركز ، وكذلك بالنسبة للقيد الهيكلي الخامس الذي يقابل مركز التوزيع الثالث فهو يشير إلى أن مجموع الكميات المنقولة إلى هذا المركز من المنطقة الإنتاجية الأولى والثانية يساوي الطاقة الاستيعابية أو الطلب لهذا المركز .

حل مشكلة النقل

يتبين من الصياغة العامة لمشكلة النقل في صورة برنامج خطي أن لهذا البرنامج طبيعة خاصة ، فالقيود الهيكلية معادلات ، ومعاملات المتغيرات القرارية إما صفر أو واحد ، ويمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس . ونظرا للطبيعة الخاصة التي يتميز

بها اقترحت طرق أخرى أكثر كفاءة من طريقة السمبلكس وتختلف عنها في خطوات الحل، ولكن الحل يتم بصفة عامة على مرحلتين :

المرحلة الأولى: إيجاد حل مبدئي ممكن An initial feasible solution

هذا الحل المبدئي يحقق القيود الهيكلية أي يضمن أن كل منطقة إنتاجية توزع إنتاجها وأن كل مركز توزيع يشبع حاجته. كذلك فإن هذا الحل ينتج عنه عدد معين من الخانات المشغولة أو المتغيرات الأساسية يساوي $(m + n - 1)$ حيث إن m تشير إلى عدد المناطق الإنتاجية و n تشير إلى عدد مراكز التوزيع.

المرحلة الثانية: اختبار أمثلية الحل المبدئي وإيجاد الحل الأمثل

وسنقدم فيما يلي بعض الطرق المعروفة لحل مشكلة النقل، فنعرض قاعدة الركن الشمالي الغربي The northwest-corner rule (N.W. Corner) وطريقة تقريب فوجل Vogels approximation method (VAM) وذلك لإيجاد الحل المبدئي ثم نعرض طريقة الحجر المتحرك The stepping-stone method وطريقة التوزيع المعدل The modified distribution method أو ما يعرف بطريقة المؤشرات Multipliers لاختبار أمثلية الحل المبدئي وإيجاد الحل الأمثل.

إيجاد الحل المبدئي الممكن

قاعد الركن الشمالي الغربي

أساس هذه القاعدة هو تخصيص أكبر عدد من الوحدات المنقولة للخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي من جدول النقل، أي أن يكون المتغير X_{11} أكبر ما يمكن، ونحذف الصف المقابل لمركز الإنتاج الذي يتم نقل كل إنتاجه، أو العمود المقابل لمركز التوزيع الذي يتم الوفاء بكل حاجته، ويتكرر ذلك حتى تتحقق جميع القيود الهيكلية الخاصة بالعرض والطلب.

مثال ١

نفترض أن لدينا جدول النقل الآتي :

من \ إلي	1	2	3	4	العرض
1	5	7	2	4	110
2	8	4	6	6	140
3	3	5	9	6	50
الطلب	100	40	40	120	300

حيث تشير القيم داخل الجدول إلى تكلفة نقل الوحدة من مركز إنتاج إلى مركز توزيع معين .

بتطبيق القاعدة السابقة نحصل على الجدول الآتي :

من \ إلي	1	2	3	4	العرض
1	100	10			110
2		30	40	70	140
3				50	50
الطلب	100	40	40	120	300

نضع $X_{11} = 100$ ونحذف العمود الأول لأن المركز التوزيعي الأول يكون قد أشبع حاجته ، ويبقى في الصف الأول 10 وحدات .

وبوضع $X_{12} = 10$ ، نحذف الصف الأول ويبقى في العمود الثاني ثلاثون وحدة .

وبوضع $X_{22} = 30$ ، نحذف العمود الثاني ويبقى في الصف الثاني 110 وحدات .

وبوضع $X_{23} = 40$، نحذف العمود الثالث ويبقى في الصف الثاني 70 وحدة.
وبوضع $X_{24} = 70$، يبقى في العمود الرابع 50 وحدة.
وبوضع $X_{34} = 50$، تتحقق جميع شروط الطلب والعرض.
ونحصل على الحل المبدئي كما في الجدول السابق. ويلاحظ أن هذا الحل المبدئي لا يعتمد على التكلفة، وسنختبر أمثليته ونوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة الحجر المتحرك وطريقة التوزيع المعدل (أو المؤشرات)، وذلك بعد عرض طريقة تقريب ڤوجل.

طريقة تقريب ڤوجل

تمتاز هذه الطريقة على قاعدة الركن الشمالي الغربي في أنها تعتمد على معدل تكلفة النقل وتؤدي إلى الحل الأمثل في نسبة كبيرة من الحالات، وفي الحالات التي لا تؤدي فيها إلى الحل الأمثل تؤدي إلى نتيجة قريبة منه، وتتلخص إجراءات هذه الطريقة فيما يلي:

١ - لكل صف ولكل عمود نحسب قيمة الجزاء التي تساوي الفرق بين أقل تكلفة والتكلفة التي تليها.

٢ - نحدد خانة أقل تكلفة مقابلة لأكبر قيمة جزاء.

٣ - نخصص أكبر عدد من الوحدات المنقولة لهذه الخانة ونحذف الصف المقابل لمنطقة الإنتاج التي توزع كل إنتاجها أو العمود المقابل لمركز التوزيع الذي تشبع حاجته.

٤ - إذا تم حذف صف معين يعاد إيجاد تكلفة الجزاء للأعمدة. وإذا تم حذف عمود معين، يعاد إيجاد تكلفة الجزاء للصفوف، ونستمر في ذلك حتى يتم تخصيص كل الوحدات.

ولشرح هذه الطريقة على المثال محل الدراسة، ننظر إلى الصف الأول فنجد أن أقل معدل تكلفة 2 والتكلفة التي تليها 4، ويعني ذلك أن من الأفضل نقل أكبر عدد من الوحدات للسوق الثالث لأن معدل تكلفة النقل إليه أقل ما يمكن بالنسبة للأسواق الأخرى ثم للسوق الرابع الذي يليه من حيث انخفاض معدل تكلفة

النقل، وأصغر تكلفة جزاء مقابلة لعدم نقل الوحدة للسوق الثالث هي 2 = 2 − 4، وهي قيمة الجزاء المقابلة للصف الأول. وبالمثل نوجد قيمة الجزاء المقابلة لجميع الصفوف والأعمدة كما في الجدول الآتي :

		2	1	4	2	
		1	2	3	4	
2	1	5	7	2 40	4	110
2	2	8	4	6 X	6	140
2	3	3	5	9 X	6	50
		100	40	40	120	

ونجد أن أكبر قيمة جزاء هي 4، وهي تقابل العمود الثالث، وخانة أقل تكلفة هي الخانة المقابلة في الصف الأول. لذلك نخصص أكبر كمية من الوحدات المنقولة من المصنع الأول للسوق الثالث وهي 40، ثم نحذف العمود الثالث ونحسب قيم الجزاء للصفوف من جديد، ونستمر في الحل كما في الجدول التالي :

			2	1	4	2	
			1	2	3	4	
1	2	1	5	7	2 40	4	110
2	2	2	8	4	6 X	6	140
2	2	3	3 50	5 X	9 X	6 X	50
			100	40	40	120	

سنحذف الصف الثالث لأنه يقابل أقلة تكلفة في الخانة المقابلة لـX_{31} ونضع $X_{31} = 50$، ونحسب تكلفة الجزاء للأعمدة كما هو مبين بالجدول الآتي :

			1	2	3	4	
			3	3		2	
			2	1	4	2	
1	2	1	5	7	2 40	4	110
2	2	2	8	4	6 X	6	140
2	2	3	3 50	5 X	9 X	6 X	50
			100	40	40	120	

يمكن حذف العمود الأول أو الثاني ، وسنحذف العمود الثاني لأنه يقابل أقل تكلفة في الخانة المقابلة لـX_{22}، ونضع $X_{22} = 40$، ونحسب تكلفة الجزاء للصفوف كما في الجدول التالي :

				1	2	3	4	
				3	3		2	
				2	1	4	2	
1	1	2	1	5 50	7 X	2 40	4	110
2	2	2	2	8 X	4 40	6 X	6	140
	2	2	3	3 50	5 X	9 X	6 X	50
				100	40	40	120	

نضع $X_{11} = 50$، ونحذف العمود الأول ونحسب X_{14} كالتالي :

$$X_{14} = 110 - (40 + 50) = 20$$

وكذلك نجد أن :

$$X_{24} = 120 - 20 = 100$$

ونحصل على الحل المبدئي باستخدام طريقة تقريب ڤوجل كالتالي :

	1	2	3	4	
1	50		40	20	110
2		40		100	140
3	50				50
	100	40	40	120	

ولاختبار أمثلية هذا الحل سنستخدم طريقة الحجر المتحرك أو طريقة التوزيع المعدل (المؤشرات) .

اختبار أمثلية الحل المبدئي وإيجاد الحل الأمثل

طريقة الحجر المتحرك

تعتمد هذه الطريقة على دراسة تأثير إدخال كل متغير غير أساسي في الحل، فإذا وجدنا أن إدخال متغير غير أساسي (أو أكثر) في الحل سينتج عنه تخفيض في تكلفة النقل نختار هذا المتغير إذا كان هو المتغير الوحيد، أو نختار المتغير الذي ينتج من إدخاله في الحل أكبر تخفيض ممكن في التكلفة ونزيده بأكبر عدد ممكن من الوحدات ثم نعيد تقويم تأثير إدخال كل متغير غير أساسي في الحل بالطريقة نفسها حتى نحصل على التوزيع الأمثل .

ولشرح هذه الطريقة سنستعين بنتيجة الحل المبدئي الذي حصلنا عليه من قاعدة الركن الشمالي الغربي في المثال المدروس والمبينة بجدول النقل الآتي :

إلي / من	1	2	3	4	العرض
1	5 100	7 10 ⊖	2 ⊕	4	110
2	8	4 30 ⊕	6 40 ⊖	6 70	140
3	3	5	9	6 50	50
الطلب	100	40	40	120	300

نقيم كل خانة غير مشغولة وذلك بحساب تكلفة إضافة وحدة للمتغير المقابل للخانة، وذلك بأن نكون ممرا دائريا loop بادئين بالخانة المراد تقويمها، ونعود مرة أخرى إلى الخانة نفسها ونكون هذا الممر من خطوات أفقية ورأسية، وكل خطوة فيما عدا الخطوة الأخيرة تمر بخلية مشغولة (أي بمتغير أساسي) ونضع الإشارات ⊕، ⊖، . . . ، ⊖ على الترتيب في الخانات التي يمر بها الممر، وإذا مر الممر في أي صف أو أي عمود فستكون به خانة ذات إشارة ⊖ وخانة ذات إشارة ⊕. ثم تحسب تكلفة نقل وحدة إضافية في الخانة المراد تقويمها بجمع التكلفة المقابلة للخانات المشار إليها بـ ⊕ وطرح التكلفة المقابلة للخانات المشار إليها بـ ⊖، والمتغير الداخل هو الذي يقابل الخانة التي تقيم بأكبر قيمة سالبة.

ولتحديد المتغير الخارج، نأخذ الممر المقابل للمتغير الداخل ونفحص جميع الخلايا ذات الإشارة ⊖، والمتغير الخارج هو الذي يقابل الخلية المشغولة بأقل عدد من الوحدات. يضاف هذا العدد إلى الخلايا ذات الإشارة ⊕ ويطرح من الخلايا ذات الإشارة ⊖ فنحصل على جدول نقل جديد.

وبتطبيق ذلك على المثال المدروس، نحسب أولا تكلفة إضافة وحدة لكل خانة غير مشغولة بتكوين الممرات الدائرية المقابلة لها كما في الجدول التالي :

الخلية		الممر الدائري (الحجر المتحرك)	تكلفة إضافة وحدة للخلية
1	3	(1 2) (2 2) (2 3)	$2 - 7 + 4 - 6 = -7$
1	4	(2 4) (2 2) (1 2)	$4 - 6 + 4 - 7 = -5$
2	1	(2 2) (1 2) (1 1)	$8 - 4 + 7 - 5 = 6$
3	1	(3 4) (2 4) (2 2) (1 2) (1 1)	$3 - 6 + 6 - 4 + 7 - 5 = 1$
3	2	(3 4) (2 4) (2 2)	$5 - 6 + 6 - 4 = 1$
3	3	(3 4) (2 4) (2 3)	$9 - 6 + 6 - 6 = 3$

من الجدول السابق نجد أن تكلفة النقل تنخفض بـ 7 عند زيادة X_{13} بوحدة واحدة، وتنخفض بـ 5 عند زيادة X_{14} بوحدة واحدة، وتزيد بـ 6 عند زيادة X_{21} بوحدة واحدة، وهكذا بالنسبة لبقية خلايا الجدول. ولذلك نختار X_{13} متغير داخلا .

ولتحديد المتغير الخارج نأخذ الممر الدائري المقابل للمتغير الداخل X_{13}، فنجد أن أقل كمية منقولة في الخانات التي يمر بها الممر والمشار إليها بالإشارة ⊖ هي 10 وهي في الخانة (2 1)، فيكون المتغير الخارج هو X_{12} كما هو مبين في جدول النقل المبدئي . ولتكوين جدول النقل التالي ننظر في خانات الممر الدائري المقابل للمتغير الداخل، فنزيد المتغيرات المقابلة للخانات ذات الإشارة ⊕ بـ10 وحدات، ونخفض المتغيرات المقابلة للخانات ذات الإشارة ⊖ بـ10 وحدات، أي إننا نزيد كلا من X_{13} و X_{22} بـ10 وحدات، ونخفض كلا من X_{23} و X_{12} بـ10 وحدات. وقد اخترنا المتغير الخارج الذي يقابل أقل إشغال في الخانات ذات الإشارة ⊖ لأنه إذا اخترنا متغيرا خارجا مقابلا للخانة (3 2) مثلا حيث $X_{23} = 40$، وطرحنا 40 وحدة من المتغيرات المقابلة للخانات ذات الإشارة ⊖، فإن قيمة X_{12} ستصبح 30−، وذلك غير مسموح به لأن قيم

المتغيرات يجب ألا تكون سالبة . وبتطبيق ذلك نحصل على جدول النقل التالي :

من \ إلي	1	2	3	4
1	[5] 100	[7]	[2] 10	[4]
2	[8]	[4] 40	[6] 30	[6] 70
3	[3]	[5]	[9]	[6] 50

ولتقويم الخانات غير المشغولة، أي لتحديد التكلفة المقابلة لإضافة وحدة للخلية غير المشغولة، نكون الجدول الآتي :

الخانة	خلايا الممر الدائري (الحجر المتحرك)	تكلفة إضافة وحدة للخلية
1 2	(1 3) (2 3) (2 2)	$7 - 2 + 6 - 4 = 7$
1 4	(2 4) (2 3) (1 3)	$4 - 6 + 6 - 2 = 2$
2 1	(2 3) (1 3) (1 1)	$8 - 6 + 2 - 5 = - 1$
3 1	(3 4) (2 4) (2 3) (1 3) (1 1)	$3 - 6 + 6 - 6 + 2 - 5 = - 6$
3 2	(3 4) (2 4) (2 2) (3 2)	$5 - 6 + 6 - 4 = 1$
3 3	(3 4) (2 4) (2 3)	$9 - 6 + 6 - 6 = 3$

المتغير الداخل هو X_{31} لأن الخانة المقابلة لأكبر تكلفة سالبة هي (1 3)، ونكون الممر المقابل لهذا المتغير كما في الجدول الآتي :

من \ إلي	1	2	3	4
1	100 ⊖		10 ⊕	
2		40	30 ⊖	70 ⊕
3	⊕			50 ⊖

وحيث إن أقل إشغال في الخانات المشار لها بـ ⊖ هي الخانة المقابلة لـ X_{23} فسنختار X_{23} متغيرا خارجا، ونحصل على جدول النقل الآتي :

من \ إلي	1	2	3	4
1	(5) 70	(7)	(2) 40	(4)
2	(8)	(4) 40	(6)	(6) 100
3	(3) 30	(5)	(9)	(6) 20

ونقيم الخانات غير المشغولة كما في الجدول الآتي :

الخانة	خلايا الممر الدائري (الحجر المتحرك)	تكلفة إضافة وحدة للخلية
1 2	(1 1) (3 1) (3 4) (2 4) (2 2)	$7-5+3-6+6-4=1$
1 4	(3 4) (3 1) (1 1)	$4-6+3-5=-4$
2 1	(2 4) (3 4) (3 1)	$8-6+6-3=5$
2 3	(2 4) (3 4) (3 1) (1 1) (1 3)	$6-6+6-3+5-2=6$
3 2	(3 4) (2 4) (2 2)	$5-6+6-4=1$
3 3	(1 3) (1 1) (3 1)	$9-2+5-3=9$

المتغير الداخل هو X_{14} لأن الخانة المقابلة لأكبر تكلفة سالبة هي (4 1)، ونكون الممر المقابل لهذا المتغير كما في الجدول الآتي :

من \ إلي	1	2	3	4
1	70 ⊖		40	⊕
2		40		100
3	30 ⊕			20 ⊖

وحيث إن أقل إشغال في الخانات المشار إليها بـ θ هي الخانة (4 3)، فسنختار X_{34} متغيرا خارجا، ونحصل على الجدول الآتي:

إلى / من	1	2	3	4
1	5 50	7	2 40	4 20
2	8	4 40	6	6 100
3	3 50	5	9	6

ولتقويم خلايا الجدول السابق غير المشغولة، نكون الجدول الآتي:

الخانة	خلايا الممر الدائري (الحجر المتحرك)	تكلفة إضافة وحدة للخلية
1 2	(1 4) (2 4) (2 2)	$7-4+6-4=5$
2 1	(1 1) (1 4) (2 4)	$8-5+4-6=1$
2 3	(1 3) (1 4) (2 4)	$6-2+4-6=2$
3 2	(3 1) (1 1) (1 4) (2 4) (2 2)	$5-3+5-4+6-4=5$
3 3	(3 1) (1 1) (1 3)	$9-3+5-2=9$
3 4	(3 1) (1 1) (1 4)	$6-3+5-4=4$

وحيث إن إضافة وحدة لكل خلية غير مشغولة تؤدي إلى زيادة التكلفة، فإن التوزيع الأخير هو التوزيع الأمثل.

طريقة التوزيع المعدل (أو المؤشرات)

يعتمد تقويم الخانات غير المشغولة المقابلة للمتغيرات غير الأساسية في طريقة الحجر المتحرك على تكوين ممر دائري يبدأ من كل خانة يراد تقويمها وينتهي بها، أي

إنه في كل تقريب يتم تكوين ممرات دائرية بعدد الخانات غير المشغولة. ولكن طريقة التوزيع المعدل تعتمد على تقويم الخانات غير المشغولة باستخدام المتغيرات البديلة المقابلة لكل منطقة إنتاجية ولكل مركز توزيع والتي تعرف بالمؤشرات وباستخدام معدل التكلفة، أي إننا في طريقة التوزيع المعدل نكون ممرا دائريا واحدا عند كل تقريب.

وتتلخص خطوات طريقة المؤشرات فيما يلي :

١ - بناء على الحل المبدئي الناتج من قاعدة الركن الشمالي الغربي أو طريقة تقريب ڤوجل، نفترض أن المؤشر المقابل لكل صف i في جدول النقل هو U_i، وأن المؤشر المقابل لكل عمود j هو V_j، ولكل متغير أساسي (يقابل خانة مشغولة في الجدول) X_{ij}. في الحل الحالي نكتب المعادلة :

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

ويلاحظ أن الحل المبدئي الناتج من قاعدة الركن الشمالي الغربي أو من طريقة تقريب ڤوجل يتكون من متغيرات أساسية عددها $m + n - 1$، حيث m تشير إلى عدد الصفوف (المناطق الإنتاجية أو المصانع)، و n تشير إلى عدد الأعمدة (مراكز التوزيع أو الأسواق)، وبالتالي يكون عدد المعادلات الناتجة $(m + n - 1)$، وعدد المؤشرات يساوي $(m + n)$، أي أن عدد المؤشرات أكبر من عدد المعادلات. ولذلك يتم تحديد قيم المؤشرات بافتراض قيمة اختيارية لأحدها (نضع عادة $U_1 = 0$) حتى يصبح عدد المعادلات مساويا لعدد المؤشرات.

وسنوضح ذلك بالاستعانة بالمثال المدروس فنفترض أن لدينا جدول النقل المبدئي الناتج من قاعدة الركن الشمالي الغربي كالتالي :

إلي / من	1	2	3	4	العرض
1	5 100	7 10	2	4	110
2	8	4 30	6 40	6 70	140
3	3	5	9	6 50	50
الطلب	100	40	40	120	300

لحساب U_i , V_j حيث $i = 1, 2, 3$ تشير إلى المنطقة الإنتاجية و $j = 1, 2, 3, 4$ تشير إلى مراكز التوزيع . نضع $U_1 = 0$ ثم نكون المعادلات الآتية المقابلة للخانات المشغولة (أي للمتغيرات الأساسية) كالتالي :

$$U_1 + V_1 = 5 \quad , \quad U_1 + V_2 = 7 \quad , \quad U_2 + V_2 = 4$$

$$U_2 + V_3 = 6 \quad , \quad U_2 + V_4 = 6 \quad , \quad U_3 + V_4 = 6$$

فيكون لدينا 7 معادلات و 7 متغيرات يمكن حلها بمجرد النظر كالتالي :

لكل خانة مشغولة نطرح قيمة U_i أو V_j المعروفة من قيمة تكلفة الخانة فتنتج قيمة V_j أو U_i غير المعروفة المناظرة ونحصل على :

$$5 - 0 = V_1 \qquad \therefore V_1 = 5 \; ,$$

$$7 - 0 = V_2 \qquad \therefore V_2 = 7 \; ,$$

$$4 - 7 = U_2 \qquad \therefore U_2 = -3 \; ,$$

$$6 - (-3) = V_3 \qquad \therefore V_3 = 9 \; ,$$

$$6 - (-3) = V_4 \qquad \therefore V_4 = 9 \; ,$$

$$6 - 9 = U_3 \qquad \therefore U_3 = -3 \; .$$

ونضع قيم U_1 , U_2 , U_3 أمام المنطقة الإنتاجية الأولى والثانية والثالثة ونضع V_1 , V_2 , V_3 , V_4 أمام مراكز التوزيع الأول والثاني والثالث والرابع على الترتيب كما

في جدول النقل الآتي :

		$V_1 = 5$	$V_2 = 7$	$V_3 = 9$	$V_4 = 9$
	من \ إلي	1	2	3	4
$U_1 = 0$	1	[5] 100	[7] 10	[2]	[4]
$U_2 = -3$	2	[8]	[4] 30	[6] 40	[6] 70
$U_3 = -3$	3	[3]	[5]	[9]	[6] 50

٢ – نحسب تكلفة إضافة وحدة للخلية غير المشغولة والتي تقابل متغيرا غير أساسي كالتالي :

$$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

كما هو مبين بالجدول الآتي :

$\overline{C}_{ij}$	$C_{ij} - U_i - V_j$
$\overline{C}_{13}$	$2 - 0 - 9 = -7$
$\overline{C}_{14}$	$4 - 0 - 9 = -5$
$\overline{C}_{21}$	$8 - (-3) - 5 = 6$
$\overline{C}_{31}$	$3 - (-3) - 5 = 1$
$\overline{C}_{32}$	$5 - (-3) - 7 = 1$
$\overline{C}_{33}$	$9 - (-3) - 9 = 3$

فإذا كانت قيمة أو أكثر من قيم $\overline{C}_{ij}$ سالبة فإن التوزيع السابق يكون غير أمثل لأن القيمة السالبة تشير إلى أن التكلفة الكلية للنقل ستنخفض بهذه القيمة عند زيادة

المتغير المقابل بوحدة واحدة، وإذا كانت جميع قيم $\overline{C}_{ij}$ غير سالبة يكون التوزيع أمثل.

ويلاحظ أن $\overline{C}_{ij}$ في طريقة التوزيع المعدل (أو طريقة المؤشرات) تقابل تكلفة إضافة وحدة للخلية في الممرات الدائرية للخلايا غير المشغولة في طريقة الحجر المتحرك.

من الجدول السابق نجد أن المتغير الداخل هو X_{13}، وهو الذي يقابل أكبر قيمة سالبة لـ $\overline{C}_{ij}$.

٣ - لتحديد المتغير الخارج، نكون الممر الدائري كما في طريقة الحجر المتحرك، وفي المثال المدروس نبدأ بالخانة المقابلة للمتغير الداخل X_{13} ونعود إلى الخانة نفسها كما هو مبين بالجدول الآتي:

إلي / من	1	2	3	4
1	100	10 ⊖	⊕	
2		30 ⊕	40 ⊖	70
3				50

ونجد من الجدول السابق أن المتغير الذي يقابل الخلية المشغولة بأقل عدد من الوحدات ذات الإشارة ⊖ في الممر الدائري أي المتغير الخارج هو X_{12}، ونحصل على الجدول الجديد الآتي:

إلي / من	1	2	3	4
1	100		10	
2		40	30	70
3				50

ونكرر الخطوات السابقة فنوجد المؤشرات كما في الجدول الآتي :

		$V_1 = 5$	$V_2 = 0$	$V_3 = 2$	$V_4 = 2$
	من \ إلى	1	2	3	4
$U_1 = 0$	1	[5] 100	[7]	[2] 10	[4]
$U_2 = 4$	2	[8]	[4] 40	[6] 30	[6] 70
$U_3 = 4$	3	[3]	[5]	[9]	[6] 50

ونقيم الخانات غير المشغولة كما في الجدول الآتي :

$\overline{C}_{ij}$	$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$
$\overline{C}_{12}$	$7 - 0 - 0 = 7$
$\overline{C}_{14}$	$4 - 0 - 2 = 2$
$\overline{C}_{21}$	$8 - 4 - 5 = -1$
$\overline{C}_{31}$	$3 - 4 - 5 = -6$
$\overline{C}_{32}$	$5 - 4 - 0 = 1$
$\overline{C}_{33}$	$9 - 4 - 2 = 3$

نجد من الجدول السابق أن المتغير الداخل هو X_{31}، وهو الذي يقابل أكبر قيمة سالبة لـ $\overline{C}_{ij}$ ، ولتحديد المتغير الخارج نوجد الممر الدائري كما في الجدول الآتي :

من \ إلى	1	2	3	4
1	(5) 100 ⊖	(7)	(2) 10 ⊕	(4)
2	(8)	(4) 40	(6) 30 ⊖	(6) 70 ⊕
3	(3) ⊕	(5)	(9)	(6) 50 ⊖

نجد من الجدول السابق أن أقل متغير في الخانات المشار إليها بـ ⊖ هو X_{23}، فيكون هو المتغير الخارج، ونحصل على جدول النقل الجديد الآتي :

من \ إلى	1	2	3	4
1	(5) 70	(7)	(2) 40	(4)
2	(8)	(4) 40	(6)	(6) 100
3	(3) 30	(5)	(9)	(6) 20

ونقيم الخانات غير المشغولة كما في الجدول الآتي :

$\overline{C}_{ij}$	$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$
$\overline{C}_{12}$	$7 - 0 - 6 = 1$
$\overline{C}_{14}$	$4 - 0 - 8 = -4$
$\overline{C}_{21}$	$8 - (-2) - 5 = 5$
$\overline{C}_{23}$	$6 - (-2) - 2 = 6$
$\overline{C}_{32}$	$5 - (-2) - 6 = 1$
$\overline{C}_{33}$	$9 - (-2) - 2 = 9$

نجد من الجدول السابق أن المتغير الداخل هو X_{14}، وهو الذي يقابل أكبر قيمة سالبة لـ $\overline{C}_{ij}$ ، ولتحديد المتغير الخارج نكون الممر الدائري كما في الجدول الآتي :

من \ إلى	1	2	3	4
1	70 ⊖		40	⊕
2		40		100
3	30 ⊕			20 ⊖

من الممر الدائري نجد أن X_{34} هو المتغير الخارج ، ونحصل على الجدول الجديد الآتي :

من \ إلى	1	2	3	4
1	50		40	20
2		40		100
3	50			

ونقيم الخانات غير المشغولة في الجدول الآتي :

$\overline{C}_{ij}$	$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$
$\overline{C}_{12}$	$7 - 0 - 2 = 5$
$\overline{C}_{21}$	$8 - 2 - 5 = 1$
$\overline{C}_{23}$	$6 - 2 - 2 = 2$
$\overline{C}_{32}$	$5 - (-2) - 2 = 5$
$\overline{C}_{33}$	$9 - (-2) - 2 = 9$
$\overline{C}_{34}$	$6 - (-2) - 4 = 4$

وحيث إن $\overline{C}_{ij}$ غير سالبة لجميع قيم i , j، فإن أي محاولة لتخفيض التكلفة غير ممكنة، ويكون التوزيع الأخير هو التوزيع الأمثل .

ويمكن تلخيص نتائج الحل الأمثل في الجدول الآتي :

المنطقة الإنتاجية	مركز التوزيع	تكلفة نقل الوحدة	عدد الوحدات المنقولة	تكلفة النقل
1	1	5	50	250
1	3	2	40	80
1	4	4	20	80
2	2	4	40	160
2	4	6	100	600
3	1	3	50	150
			وحدة نقدية	1320

ويلاحظ أن الوفر في التكلفة الذي يحققه تقريب معين بالنسبة للتقريب السابق له يمكن الحصول عليه بإيجاد الفرق بين مجموع حاصل ضرب الكميات المنقولة في معدل التكلفة المقابل في التقريبين، ففي التقريب قبل الأخير في المثال المدروس، نجد أن مجموع تكلفة النقل يساوي:

$$5 \times 70 + 2 \times 40 + 4 \times 40 + 6 \times 100 + 3 \times 30 + 6 \times 20 = 1400$$

والفرق في تكلفة النقل بين التقريبين الأخيرين هو:

$$1400 - 1320 = 80$$

ويمكن إيجاد ذلك مباشرة، وذلك لأن قيمة المتغير الداخل في التقريب الأخير وهو X_{14} هي 20، وكل وحدة من هذا المتغير ستخفض التكلفة بمقدار 4 وحدات نقدية لأن $\overline{C}_{14} = -4$ ، أي أن تكلفة النقل انخفضت في التقريب الأخير بمقدار $4 \times 20 = 80$ وحدة نقدية.

ويلاحظ أن $\overline{C}_{ij}$ المقابلة لخانة معينة $(i\,j)$ غير مشغولة في طريقة المؤشرات تساوي تكلفة إضافة وحدة للخانة في الممر الدائري في طريقة فوجل ويتضح ذلك من مقارنة نتائج تقويم الخانات غير المشغولة في كل تقريب بكلا الطريقتين في المثال محل الدراسة حيث قمنا بحله بالطريقتين.

البرنامج البديل لمشكلة النقل The Dual Transportation Problem

تعتمد طريقة التوزيع المعدل (أو المؤشرات) لإيجاد الحل الأمثل لمشكلة النقل على المتغيرات البديلة للبرنامج الخطي للمشكلة والتي تعرف بالمؤشرات. ولبيان هذه المؤشرات سنفترض أن لدينا مشكلة نقل مكونة من منطقتين إنتاجيتين وثلاثة مراكز

توزيع، وأن البرنامج الخطي لهذه المشكلة كالتالي:

$$\min \quad C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23}$$

طبقا للشروط الآتية:

$$\begin{array}{lllllll}
X_{11}+ & X_{12}+ & X_{13} & & & & = a_1 \\
 & & & X_{21}+ & X_{22}+ & X_{23} & = a_2 \\
X_{11} & & + & X_{21} & & & = b_1 \\
 & X_{12} & & + & X_{22} & & = b_2 \\
 & & X_{13} & & + & X_{23} & = b_3 \\
X_{11}, & X_{12}, & X_{13}, & X_{21}, & X_{22}, & X_{23} & \geq 0
\end{array}$$

يلاحظ أن معاملات X_{ij} في القيود الهيكلية إما صفر أو واحد صحيح. وللحصول على البرنامج البديل نكون الصورة القياسية للبرنامج السابق، وذلك بتحويل دالة الهدف إلى صورة تعظيم وإحلال كل معادلة في القيود الهيكلية بمتباينتين في صورة أقل من أو يساوي كالتالي:

$$\max - C_{11}X_{11} - C_{12}X_{12} - C_{13}X_{13} - C_{21}X_{21} - C_{22}X_{22} - C_{23}X_{23}$$

طبقا للشروط الآتية:

$$\begin{array}{lllllll}
X_{11} \ + & X_{12}+ & X_{13} & & & & \leq a_1 \\
-X_{11} \ - & X_{12}- & X_{13} & & & & \leq -a_1 \\
 & & & X_{21}+ & X_{22}+ & X_{23} & \leq a_2 \\
 & & - & X_{21}- & X_{22}- & X_{23} & \leq -a_2 \\
X_{11} & & + & X_{21} & & & \leq b_1 \\
-X_{11} & & - & X_{21} & & & \leq -b_1 \\
 & X_{12} & & + & X_{22} & & \leq b_2 \\
- & X_{12} & & - & X_{22} & & \leq -b_2 \\
 & & X_{13} & & + & X_{23} & \leq b_3 \\
 & - & X_{13} & & - & X_{23} & \leq -b_3 \\
 & & X_{ij} \geq 0 & & & &
\end{array}$$

لجميع قيم i ، j

سنفترض أن المتغيرات البديلة هي :

U_i^- = المتغير البديل للقيد الأصلي المقابل للمنطقة الإنتاجية i،

U_i^+ = المتغير البديل للقيد الإضافي المقابل للمنطقة الإنتاجية i،

V_j^- = المتغير البديل للقيد الأصلي المقابل لمركز التوزيع j،

V_j^+ = المتغير البديل للقيد الإضافي المقابل لمركز التوزيع j،

وبناء على ذلك يكون البرنامج البديل كالتالي :

سنفترض أن :

$$\min\ a_1U_1^- - a_1U_1^+ + a_2U_2^- - a_2U_2^+ + b_1V_1^- - b_1V_1^+ + b_2V_2^- - b_2V_2^+ + b_3V_3^- - b_3V_3^+$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\begin{aligned}
&U_1^- - U_1^+ + V_1^- - V_1^+ \ge -C_{11}\\
&U_1^- - U_1^+ + V_2^- - V_2^+ \ge -C_{12}\\
&U_1^- - U_1^+ + V_3^- - V_3^+ \ge -C_{13}\\
&U_2^- - U_2^+ + V_1^- - V_1^+ \ge -C_{21}\\
&U_2^+ - U_2^+ + \quad + V_2^- - V_2^+ \ge -C_{22}\\
&U_2^+ - U_2^+ + \quad + V_3^+ + V_3^+ \ge -C_{23}
\end{aligned}$$

$U_i^-\ ,\ U_i^+\ ,\ V_j^-\ ,\ V_j^+ \ge 0 \qquad i = 1\ ,2 \quad ,\quad j = 1\ ,2\ ,3$

سنفترض أن

$$U_i^+ - U_i^- = U_i\ ,\ V_j^+ - V_j^- = V_j$$

حيث U_i ، V_j غير محددة الإشارة ، ونغير اتجاه المتباينات السابقة ، ونضرب كل حد في القيود الهيكلية في (1–) فنحصل على :

$$\min \quad - a_1 U_1 - a_2 U_2 - b_1 V_1 - b_2 V_2 - b_3 V_3$$

طبقا للشروط الآتية :

$$
\begin{array}{llllllll}
U_1 & & + & V_1 & & & & \le C_{11} \\
U_1 & & & & + & V_2 & & \le C_{12} \\
U_1 & & & & & & + \; V_3 & \le C_{13} \\
 & U_2 & + & V_1 & & & & \le C_{21} \\
 & U_2 & & & + & V_2 & & \le C_{22} \\
 & U_2 & & & & & + \; V_3 & \le C_{23}
\end{array}
$$

والمتغيرات $U_1 \, , \, U_2 \, , \, V_1 \, , \, V_2 \, , \, V_3$ غير محددة الإشارة . وبتغيير إشارة معاملات دالة الهدف ، تصبح في صورة تعظيم .

وبصفة عامة إذا كانت المشكلة الأصلية في الصورة :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \quad X_{ij}$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{i\,j} = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{i\,j} = b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$X_{i\,j} \ge 0$$

لجميع قيم $i \, , \, j$

فإن المشكلة البديلة هي :

$$\max \sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j$$

طبقا للشروط الآتية :

$$U_i + V_j \le C_{i\,j}$$

لجميع قيم $i \, , \, j$

حيث $U_i \, , \, V_j$ غير محددة الإشارة .

ولكل متغير أساسي $X_{ij} > 0$ في البرنامج الأصلي يكون القيد المقابل في البرنامج البديل في صورة معادلة، وذلك طبقا لمبدأ التكامل بحيث إن:

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

وباقي القيود الهيكلية في البرنامج البديل ستكون في صورة متباينات كالتالي:

$$U_i + V_j \le C_{ij}$$

وذلك لجميع المتغيرات غير الأساسية X_{ij} حيث $X_{ij} = 0$، وتمثل

$$C_{ij} - (U_i + V_j)$$

القيمة التي تزيد بها دالة الهدف عند زيادة المتغير المقابل بوحدة واحدة.

حالات خاصة لمشكلة النقل

عند حل مشكلة النقل، قد تقابلنا حالة أو أكثر من الحالات الخاصة التي نعرضها فيما يلي:

عدم تساوي العرض والطلب

لحل مشكلة النقل بالطرق السابقة يجب تساوي الطلب الكلي مع العرض الكلي، فإذا كان الطلب الكلي أكبر من العرض الكلي نكون منطقة إنتاجية (أو مصنعا) وهميا a dummy supply source ونضع التكلفة المقابلة لهذه المنطقة مساوية للصفر والطاقة الإنتاجية لها مساوية لفائض الطلب الكلي على العرض الكلي، وإذا كان العرض الكلي أكبر من الطلب الكلي نكون مركز توزيع (أو سوقا) وهميا a dummy market ونضع التكلفة المقابلة لهذا المركز مساوية للصفر والطاقة الاستيعابية له تساوي زيادة العرض الكلي على الطلب الكلي.

التحليل عند تحديد المتغير الخارج باستخدام الطريقة المعدلة أو طريقة الحجر المتحرك

عند تكوين الممر الدائري لتحديد المتغير الخارج باستخدام الطريقة المعدلة أو طريقة الحجر المتحرك، قد نجد أكثر من خانة من الخانات التي بها إشارة ⊖ بها أقل

إشغال بنفس عدد الوحدات، ويعني ذلك أن هناك أكثر من متغير يمكن أن يكون متغيرا خارجا. ونختار أيا من هذه المتغيرات كمتغير خارج، ونعتبر أن المتغيرات الباقية متغيرات أساسية مساوية للصفر، وذلك حتى يكون عدد المتغيرات الأساسية مساويا لـ $(m + n - 1)$ حيث m تمثل عدد المصانع، و n عدد الأسواق في التقريب التالي، وتصبح المشكلة مهيأة لتطبيق إجراءات الحل باستخدام الطريقة المعدلة أو باستخدام طريقة الحجر المتحرك.

مثال ٢

سنفترض أن لدينا منطقتين إنتاجيتين وثلاثة مراكز توزيع، وقدرت الطاقات الإنتاجية للمنطقتين وحاجات مراكز التوزيع كما هو مبين بالجدول الآتي:

إلى / من	1	2	3	العرض
1	6	8	14	1000
2	8	8	4	600
الطلب	500	800	600	1600 / 1900

يلاحظ أن الطلب الكلي يزيد على العرض الكلي بـ 300 وحدة، والعجز في العرض الكلي يمكن تعويضه بإضافة منطقة إنتاجية وهمية أو صورية تنتج 300 وحدة كما هو مبين بالجدول الآتي، حيث نضع التكلفة المقابلة للخانات الجديدة مساوية للصفر.

إلى / من	1	2	3	العرض
1	6	8	14	1000
2	8	8	4	600
3	0	0	0	300
الطلب	500	800	600	1900

وبذلك نحصل على التوازن المطلوب .

وبتطبيق قاعدة الركن الشمالي الغربي، نحصل على الجدول الآتي :

من \ إلى	1	2	3	العرض
1	500	500		1000
2		300	300	600
3			300	300
الطلب	500	800	600	1900

نوجد المؤشرات المقابلة لكل صف وكل عمود كما في الجدول الآتي :

	من \ إلى	1 ($V_1 = 6$)	2 ($V_2 = 8$)	3 ($V_3 = 4$)	العرض
$U_1 = 0$	1	6 500	8 500	14 (10)	1000
$U_2 = 0$	2	8 (2)	8 300 ⊖	4 300 ⊕	600
$U_3 = -4$	3	0 (−2)	0 (−4) ⊕	0 300 ⊖	300
	الطلب	500	800	600	1900

ويمكن تقويم الخانات غير المشغولة في الجدول السابق وكتابة نتيجة تقويم كل خانة في دائرة، ومنه نجد أن المتغير الداخل هو X_{32}، ومن الممر الدائري نجد أن المتغير الخارج هو X_{33} أو X_{22}، فسنختار X_{33} متغيرا خارجا ونعتبر أن X_{22} متغير أساسي قيمته

صفر، ونحصل على الجدول الآتي :

	من \ إلى	1 ($V_1 = 6$)	2 ($V_2 = 8$)	3 ($V_3 = 4$)	العرض
$U_1 = 0$	1	6 / 500	8 / 500	14 / (10)	1000
$U_2 = 0$	2	8 / (2)	8 / 0	4 / 600	600
$U_3 = -8$	3	0 / (2)	0 / 300	0 / (4)	300
	الطلب	500	800	600	1900

وحيث إن نتيجة تقويم الخانات غير المشغولة في الجدول السابق غير سالبة لجميع الخانات، فإن الجدول السابق يمثل التوزيع الأمثل للنقل، ومنه يتبين أن 300 وحدة من طلب السوق الثاني لم تشبع، وهي تمثل مقدر زيادة الطلب عن العرض .

مثال ٣

سنفترض أن لدينا ثلاثة مصانع وسوقين وأن جدول النقل كالتالي :

من \ إلى	1	2	العرض
1	3	4	250
2	4	4	400
3	7	2	300
الطلب	500	300	950 / 800

يلاحظ أن إجمالي العرض يزيد عن إجمالي الطلب بـ 150 وحدة، والزيادة في العرض يمكن استيعابها بإضافة مركز توزيع أو سوق جديد وهمي أو صوري يستوعب 150 وحدة كما هو مبين بالجدول الآتي، حيث نضع التكلفة المقابلة للخانات الجديدة مساوية للصفر.

		$V_1 = 3$	$V_2 = 3$	$V_3 = 1$	
	من \ إلى	1	2	3	العرض
$U_1 = 0$	1	[3] 250	[4] (1)	[0] (−1)	250
$U_2 = 1$	2	[4] 250	[4] 150 ⊖	[0] (−2) ⊕	400
$U_3 = -1$	3	[7] (5)	[2] 150 ⊕	[0] 150 ⊖	300
	الطلب	500	300	150	950

نكون الحل المبدئي طبقا لطريقة الركن الشمالي الغربي ونوجد المؤشرات كما في الجدول السابق. وبتقويم الخانات غير المشغولة، نجد أن المتغير الداخل هو X_{23} والمتغير الخارج هو إما X_{22} أو X_{33}، فسنختار X_{22} كمتغير خارج، ونضع $X_{33} = 0$ ونعتبره متغيرا أساسيا، ونحصل على التوزيع المبين بالجدول الآتي:

		$V_1 = 3$	$V_2 = 1$	$V_3 = -1$	
	من \ إلى	1	2	3	العرض
$U_1 = 0$	1	[3] 250	[4] (3)	[0] (1)	250
$U_2 = 1$	2	[4] 250	[4] (2)	[0] 150	400
$U_3 = 1$	3	[7] (3)	[2] 300	[0] 0	300
	الطلب	500	300	150	950

وحيث إن نتيجة تقويم الخانات غير المشغولة في الجدول السابق غير سالبة لجميع الخانات، فإن الجدول السابق يمثل التوزيع الأمثل، ومنه يتبين أن 150 وحدة من إنتاج المصنع الثاني لم توزع، وهي تمثل مقدار زيادة العرض على الطلب.

التحلل في طريقة تقريب ڤوجل

قد يحدث عند تطبيق طريقة تقريب ڤوجل أن نصل إلى خانة معينة يكون الطلب الذي يقابلها مشبعا وفي الوقت نفسه يكون العرض الذي يقابلها موزعا بالكامل. وحتى نستمر في الحل، نحذف إما الصف أو العمود المقابل لهذه الخانة.

مثال ٤

سنفترض أن لدينا جدول النقل الآتي:

		1	1	3	
	من \ إلى	1	2	3	العرض
2	1	4	6	9	150
0	2	5	8	5	50
1	3	3	7	2 100	100
	الطلب	80	120	100	300

بتطبيق طريقة ڤوجل نختار العمود الثالث المقابل لأكبر قيمة جزاء ونضع $X_{33} = 100$ حيث إنه يقابل أقل تكلفة، ونجد أن المنطقة الإنتاجية الثالثة وزعت كل إنتاجها، وأن مركز التوزيع الثالث أشبع كل طلبه. فإذا حذفنا الصف الثالث والعمود الثالث معا، فإن عدد الخانات المشغولة أو عدد المتغيرات الأساسية سيكون أقل من

العدد اللازم لتطبيق الطريقة المعدلة أو لتطبيق طريقة الحجر المتحرك . لذلك سنحذف إما الصف الثالث أو العمود الثالث فقط . سنفترض أننا حذفنا الصف الثالث، فنحصل على الجدول الآتي :

	إلى / من	1	2	3	العرض
		1	2	4	
2 2	1	4 30	6 120	9 X	150
3 0	2	5 50	8	5 0	50
	3	3 X	7 X	2 100	100
	الطلب	80	120	100	300

نجد من الجدول السابق أن قيمة الجزاء الأكبر أمام العمود الثالث، لذلك نضع $X_{23} = 0$ ونشطب العمود الثالث، فنجد أن قيمة الجزاء الأكبر أمام الصف الثاني، فنضع $X_{21} = 50$ ونشطب الصف الثاني ثم نضع $X_{11} = 30$ و $X_{12} = 120$.

وبتطبيق الطريقة المعدلة، نجد أن تقويم الخانات غير المشغولة ينتج قيما موجبة كما في الجدول الآتي مما يدل على أن هذا التوزيع أمثل .

	إلى / من	1	2	3	العرض
		$V_1 = 4$	$V_2 = 6$	$V_3 = 4$	
$U_1 = 0$	1	4 30	6 120	9 (5)	150
$U_2 = 1$	2	5 50	8 (1)	5 0	50
$U_3 = -2$	3	3 (1)	7 (3)	2 100	100
	الطلب	80	120	100	300

التحلل عند تطبيق قاعدة الركن الشمالى الغربي

قد يحدث عند تكوين الجدول المبدئي في بعض مشاكل النقل باستخدام قاعدة الركن الشمالي الغربي كما هو الحال عند تطبيق طريقة ڤوجل أن نصل إلى خانة معينة يكون الطلب الذي يقابلها مشبعا، وفي الوقت نفسه يكون العرض الذي يقابلها موزعا بالكامل. وفي هذه الحالة نتحرك إلى الخانة التي على اليمين أو إلى الخانة التي أسفلها مباشرة ونخصص صفرا للخانة التي ننتقل إليها ونعاملها كما لو كانت مشغولة، والمتغير الأساسي الذي يشغلها يساوي صفرا، وبذلك يكون عدد المتغيرات الأساسية مساويا للعدد اللازم لتطبيق الطريقة المعدلة أو طريقة الحجر المتحرك، حيث إنه يجب أن يكون عدد الخانات المشغولة أو المتغيرات الأساسية مساويا لـ $(m + n + 1)$ حيث m تشير إلى عدد المناطق الإنتاجية أو المصانع، و n تشير إلى عدد مراكز التوزيع أو الأسواق، وذلك حتى يمكن إيجاد المؤشرات وتقويم الخانات غير المشغولة في الطريقة المعدلة، وحتى يمكن إكمال الممرات المغلقة في طريقة الحجر المتحرك.

مثال ٥

سنفترض أن لدينا جدول النقل الآتي:

		$V_1 = 5$	$V_2 = 0$	$V_3 = 2$	$V_4 = 5$	
	من \ إلى	1	2	3	4	العرض
$U_1 = 0$	1	5 50 ⊖	0 50 ⊕	10 (8)	1 (-4)	100
$U_2 = 5$	2	7 (-3)	5 50	4 (-3)	9 (-1)	50
$U_3 = 6$	3	3 ⊕	6 0 ⊖	8 80	11 70	150
	الطلب	50	100	80	70	300

بتطبيق قاعدة الركن الشمالي الغربي على الجدول السابق نجد أن $X_{22} = 50$ وأن المصنع الثاني المقابل لهذا المتغير يكون قد وزع كل إنتاجه، وأن السوق الثاني يكون قد أشبع حاجته وهي 100 وحدة، وقد وضعنا $X_{32} = 0$ وأكملنا الجدول طبقا للقاعدة فأصبح عدد الخانات المشغولة أو المتغيرات الأساسية يساوي 6، كما هو مبين بالجدول السابق. وبتطبيق الطريقة المعدلة، نجد أن المتغير الداخل هو X_{31} والمتغير الخارج هو X_{32}، فنحصل على الجدول الآتي:

		$V_1 = 5$	$V_2 = 0$	$V_3 = 10$	$V_4 = 13$	
	إلى / من	1	2	3	4	العرض
$U_1 = 0$	1	5 / 50 ⊖	0 / 50	10 / (0)	1 / (-12) ⊕	100
$U_2 = 5$	2	7 / (-3)	5 / 50	4 / (-11)	9 / (-9)	50
$U_3 = -2$	3	3 / 0 ⊕	6 / (8)	8 / 80	11 / 70 ⊖	150
	الطلب	50	100	80	70	300

المتغير الداخل هو X_{14} والمتغير الخارج هو X_{11}، فنحصل على الجدول الآتي:

		$V_1 = -7$	$V_2 = 0$	$V_3 = -2$	$V_4 = 1$	
	إلى / من	1	2	3	4	العرض
$U_1 = 0$	1	5 / (12)	0 / 50 ⊖	10 / (12)	1 / 50 ⊕	100
$U_2 = 5$	2	7 / (9)	5 / 50	4 / (1)	9 / (3)	50
$U_3 = 10$	3	3 / 50	6 / (-4) ⊕	8 / 80	11 / 20 ⊖	150
	الطلب	50	100	80	70	300

المتغير الداخل هو X_{32} والمتغير الخارج هو X_{34} ، فنحصل على الجدول الآتي :

	من \ إلى	1 ($V_1 = -3$)	2 ($V_2 = 0$)	3 ($V_3 = 2$)	4 ($V_4 = 1$)	العرض
$U_1 = 0$	1	[5] (8)	[0] 30	[10] (8)	[1] 70	100
$U_2 = 5$	2	[7] (5)	[5] 50 ⊖	[4] (-3) ⊕	[9] (3)	50
$U_3 = 6$	3	[3] 50	[6] 20 ⊕	[8] 80 ⊖	[11] (4)	150
	الطلب	50	100	80	70	300

المتغير الداخل هو X_{23} والمتغير الخارج هو X_{22}، فنحصل على الجدول الآتي :

	من \ إلى	1 ($V_1 = -3$)	2 ($V_2 = 0$)	3 ($V_3 = 2$)	4 ($V_4 = 1$)	العرض
$U_1 = 0$	1	[5] (8)	[0] 30	[10] (8)	[1] 70	100
$U_2 = 2$	2	[7] (8)	[5] (3)	[4] 50	[9] (6)	50
$U_3 = 6$	3	[3] 50	[6] 70	[8] 30	[11] (4)	150
	الطلب	50	100	80	70	300

وحيث إنه لا توجد قيم سالبة في نتائج تقويم الخانات غير المشغولة، فإن التوزيع الأخير يعتبر توزيعا أمثل .

وجود حلول مثلى متعددة

عند حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس، يمكن أن نجد حلولا مثلى متعددة إذا وجدنا في جدول السمبلكس النهائي أن المعامل المقابل لمتغير غير أساسي في الصف القياسي يساوي صفرا، ويمكن إيجاد حل أمثل آخر بجعل هذا المتغير متغيرا داخلا في جدول السمبلكس التالي.

يمكن أن نقابل مثل هذه الحالة أيضا في طريقة النقل إذا وجدنا في جدول النقل النهائي أن تقويم خانة أو أكثر من الخانات غير المشغولة يساوي صفرا. ويمكن إيجاد حل أمثل آخر بجعل المتغير المقابل لهذه الخانة متغيرا داخلا في جدول النقل أو في التقريب التالي.

مثال ٦

سنفترض أن لدينا جدول النقل الآتي:

	من \ إلى	1 ($V_1 = 35$)	2 ($V_2 = 20$)	3 ($V_3 = 35$)	العرض
$U_1 = 0$	1	40 / (5)	20 / 190	50 / (15)	190
$U_2 = 5$	2	40 / 80 ⊖	25 / 70	40 / ⊕ (0)	150
$U_3 = -5$	3	45 / (15)	30 / (15)	30 / 120	120
$U_4 = 0$	4	35 / 100 ⊕	25 / (5)	35 / 80 ⊖	180
	الطلب	180	260	200	640

يلاحظ أن نتائج تقويم الخانات غير المشغولة غير سالبة، مما يدل على أن التوزيع المعطى هو التوزيع الأمثل. كما يلاحظ أن الخانة المقابلة للمتغير X_{23} مقيمة

بالصفر، وبجعل هذا المتغير متغيرا داخلا، نحصل على الجدول الآتي :

	من \ إلي	$V_1 = 35$ 1	$V_2 = 20$ 2	$V_3 = 35$ 3	العرض
$U_1 = 0$	1	[40] (40)	[20] 190	[50] (15)	190
$U_2 = 5$	2	[40] (0)	[25] 70	[40] 80	150
$U_3 = -5$	3	[45] (5)	[30] (15)	[30] 120	120
$U_4 = 0$	4	[35] 180	[25] (5)	[35] 0	180
	الطلب	180	260	200	640

يلاحظ أن نتائج تقويم الخانات غير المشغولة غير سالبة، مما يدل على أن التوزيع السابق توزيع أمثل.

دالة الهدف في صورة تعظيم العائد

في بعض مشكلات النقل، قد يختلف صافي عائد الوحدة المنقولة من منطقة إنتاجية إلى مركز استهلاكي معين، وفي هذه الحالة يكون الهدف هو تعظيم عائد الوحدات المنقولة. ولحل هذا النوع من المشكلات، هناك عدة طرق منها ضرب معاملات دالة الهدف (أي صافي عائد الوحدة المنقولة من منطقة إلى مركز استهلاكي معين) في (1-) لتحويل الدالة إلى صورة تصغير، أو حساب تكلفة الفرصة البديلة opportunity cost لكل خانة ثم استخدام أي طريقة من الطرق السابقة، وتكلفة الفرصة البديلة هي التكلفة الناتجة من عدم اختيار أفضل بديل ممكن، فتكلفة الفرصة البديلة لخانة معينة هي الفرق بين معدل ربح هذه الخانة وأكبر معدل ربح مقابل

للخانات الأخرى في الصف نفسه أي إنها تساوي تكلفة عدم نقل كل الوحدات إلى أكثر الأماكن ربحية .

مثال ٧

سنفترض أن لدى مؤسسة مصنعين وأنها توزع إنتاجها على ثلاثة أسواق بحيث يكون معدل ربح السوق الأول 18، والثاني 17 والثالث 19، وأن تكلفة نقل الوحدة من المصنع الأول إلى السوق الأول 2 وإلى السوق الثاني 4، وإلى السوق الثالث 5، ومن المصنع الثاني إلى السوق الأول أو الثاني أو الثالث 5، والطاقة الإنتاجية للمصنع الأول 2500، وللثاني 3500، والطاقة الاستيعابية للسوق الأول 2000، وللسوق الثاني 2500، وللسوق الثالث 1500 . لإيجاد توزيع إنتاج المصنعين على الأسواق الثلاثة بشكل يحقق أكبر عائد، نكون جدول النقل التالي حيث تمثل القيم في الخانات صافي ربح الوحدة المنقولة من مصنع إلى سوق معين :

إلى / من	1	2	3	العرض
1	16	13	14	2500
2	13	12	14	3500
الطلب	2000	2500	1500	6000

من الجدول السابق يمكن تكوين جدول النقل بدلالة تكلفة الفرصة البديلة كالتالي :

إلى / من	1	2	3	العرض
1	0	3	2	2500
2	1	2	0	3500
الطلب	2000	2500	1500	6000

وبتطبيق قاعدة الركن الشمالي الغربي وطريقة المؤشرات، نحصل على الجدول الآتي:

	إلى / من	1 ($V_1 = 0$)	2 ($V_2 = 3$)	3 ($V_3 = 1$)	العرض
$U_1 = 0$	1	[0] 2000	[3] 500	[2] (1)	2500
$U_2 = -1$	2	[1] (2)	[2] 2000	[0] 1500	3500
	الطلب	2000	2500	1500	6000

ونجد أن نتائج تقويم الخانات غير المشغولة في الجدول السابق موجبة، مما يدل على أمثلية الحل المقابل.

اختلاف معدل تكلفة الإنتاج في المناطق الإنتاجية

قد تختلف تكلفة إنتاج الوحدة المنتجة من منتج معين باختلاف المنطقة الإنتاجية، ويجب أن نأخذ ذلك في الاعتبار عند صياغة المشكلة وذلك بالإضافة إلى اختلاف معدل تكلفة النقل من منطقة إلى سوق معين.

مثال ٨

نفترض أن لدينا مصنعين وثلاثة أسواق، وأن معدل تكلفة النقل من المصنع الأول إلى السوق الأول 15 وإلى السوق الثاني 13، وإلى السوق الثالث 12، ومن المصنع الثاني إلى السوق الأول 14، وإلى السوق الثاني 12، وإلى السوق الثالث 16، وأن كمية إنتاج المصنع الأول 3000، والثاني 2000، وأن حاجة السوق الأول 1500، والسوق الثاني 2500، والسوق الثالث 1000، وسنفترض أن تكلفة إنتاج الوحدة في المصنع الأول 75 وفي المصنع الثاني 80.

من ذلك، نكون جدول النقل الآتي مع الأخذ في الاعتبار اختلاف تكلفة إنتاج الوحدة في كل مصنع وذلك بإضافة 75 إلى معدل تكلفة المصنع الأول، وبإضافة 80 إلى معدل تكلفة المصنع الثاني .

إلى / من	1	2	3	العرض
1	90	88	87	3000
2	94	92	96	2000
الطلب	1500	2500	1000	5000

وباستخدام أي طريقة من طرق الحل السابقة، نحصل على التوزيع الأمثل الآتي :

إلى / من	1	2	3	العرض
1	1500	500	1000	3000
2		2000		2000
الطلب	1500	2500	1000	5000

توزيع الإنتاج على الفترات الزمنية طبقا للطلب

تستخدم طريقة النقل أيضا في معالجة مشكلات أخرى يمكن صياغتها بصورة مشابهة لطريقة النقل، مثل تخطيط إنتاج منتج وتخزينه خلال فترات زمنية معينة وتوزيعه بحسب الطلب خلال هذه الفترات مع الأخذ في الاعتبار تكلفة التخزين من فترة إلى أخرى وذلك بافتراض إنتاج كمية معينة في الوقت العادي routine time، وكمية إضافية بمعدل تكلفة أعلى في الوقت الإضافي overtime .

مثال ٩

سنفترض أن الطلب على منتج معين في خلال الأربع الفترات التالية هو 200 للفترة الأولى، و150 للفترة الثانية، و190 للفترة الثالثة، و240 للفترة الرابعة، وأن الطاقة الإنتاجية خلال الفترة الزمنية الواحدة 170 في الوقت العادي، و50 في الوقت الإضافي، وتكلفة تخزين الوحدة في الفترة 6.

والمطلوب تحديد الخطة المثلى لتوزيع الإنتاج والمخزون خلال الفترات الأربع التالية، علما بأن معدل التكلفة في الوقت العادي 40، وفي الوقت الإضافي 60.

سنشير للإنتاج في الوقت العادي في الفترة الزمنية t بالرمز R_t، وللإنتاج في الوقت الإضافي في الفترة الزمنية t بالرمز O_t حيث

$$t = 1, 2, 3, 4$$

يمكن دراسة هذه المشكلة بتكوين جدول يشبه جدول النقل، حيث نفترض أن الفترات الزمنية التي يتم فيها إنتاج المنتج في الوقت العادي وفي الوقت الإضافي تقابل المناطق الإنتاجية، وأن الفترات الزمنية التي يتم توزيع الإنتاج عليها حسب الطلب تقابل مراكز التوزيع. وعند حساب التكلفة المقابلة لكل خانة نأخذ في الاعتبار تأثير تكلفة تخزين الوحدة في الفترة الزمنية، فالوحدة المنتجة مثلا في الفترة الأولى في الوقت العادي والتي توزع في الفترة الرابعة تكلف:

$$40 + (3)(6) = 58$$

والوحدة المنتجة في الفترة الثانية في الوقت الإضافي وتوزع في الفترة الرابعة تكلف:

$$60 + (2)(6) = 72$$

وهكذا، وحيث إنه لا يمكن تخصيص إنتاج فترة معينة لإشباع طلب فترة سابقة، فإننا نضع M حيث $M \to \infty$ في الخانات التي لا يوجد تخصيص وحدات لها، وذلك كما

هو مبين بالجدول الآتي :

الإنتاج \ الفترات	1	2	3	4	فترة صورية	العرض
R_1	40	46	52	58	0	170
O_1	60	66	72	78	0	50
R_2	M	40	46	52	0	170
O_2	M	60	66	72	0	50
R_3	M	M	40	46	0	170
O_3	M	M	60	66	0	50
R_4	M	M	M	40	0	170
O_4	M	M	M	60	0	50
الطلب	200	150	190	240	100	880

يلاحظ أن العرض يزيد عن الطلب خلال الفترات الزمنية محل الدراسة بـ 100، ولذلك كونّا فترة صورية تستوعب هذه الزيادة ووضعنا أصفارا أمام التكلفة المقابلة لهذه الفترة. ويمكن باستخدام أي طريقة من طرق الحل السابقة أن نحصل على التوزيع الأمثل للإنتاج على الفترات الزمنية المختلفة.

صياغة مشكلة التعيين

تهتم مشكلة التعيين باتخاذ القرار الخاص بتخصيص مورد واحد من عدد معين من الموارد المتاحة (أشخاص أو آلات . . . الخ) على عمل واحد من عدد معين من الأعمال أو الاستخدامات البديلة بحيث يكون مقياس الفعالية (أقل تكلفة أو أقل وقت لأداء العمل أو أكبر عائد أو أكبر كفاءة إنتاجية . . . الخ) في مستواه الأمثل .

ويقابل متخذ القرار هذه المشكلة في كثير من المواقف الإدارية مثل توزيع أفراد مدربين لممارسة أعمال معينة ، أو تخصيص مندوبي تسويق للمناطق الاستهلاكية المختلفة ، أو توزيع النشاط الإعلاني على الوسائل الإعلانية المختلفة ، أو تخصيص عدد معين من الآلات لها استخدامات بديلة متعددة على هذه الاستخدامات . . . الخ .

ويمكن بيان طبيعة مشكلة التعيين بالاستعانة بالمثال المبسط الآتي :

مثال ١٠

سنفترض أن لدينا ثلاث آلات A ، B ، C يمكن أن تقوم كل منها بثلاث عمليات إنتاجية مختلفة 3 ، 2 ، 1 وأن معدل تكلفة تخصيص كل آلة لعملية معينة كما هو مبين بالجدول الآتي :

العملية / الآلة	1	2	3
A	12	6	4
B	8	8	14
C	10	14	14

لصياغة البرنامج الخطي لهذه المشكلة سنفترض أن $X_{ij} = 1$ إذا تم تخصيص الآلة i للعملية j، وأن $X_{ij} = 0$ إذا لم يتم تخصيص الآلة i للعملية j، ويكون المطلوب إيجاد قيم X_{ij} التي تصغر الدالة :

$$C = 12X_{11} + 6X_{12} + 4X_{13} + 8X_{21} + 8X_{22} + 14X_{23} + 10X_{31} + 14X_{32} + 14X_{33}$$

صياغة مشكلة التعيين

تهتم مشكلة التعيين باتخاذ القرار الخاص بتخصيص مورد واحد من عدد معين من الموارد المتاحة (أشخاص أو آلات . . . الخ) على عمل واحد من عدد معين من الأعمال أو الاستخدامات البديلة بحيث يكون مقياس الفعالية (أقل تكلفة أو أقل وقت لأداء العمل أو أكبر عائد أو أكبر كفاءة إنتاجية . . . الخ) في مستواه الأمثل .

ويقابل متخذ القرار هذه المشكلة في كثير من المواقف الإدارية مثل توزيع أفراد مدربين لممارسة أعمال معينة ، أو تخصيص مندوبي تسويق للمناطق الاستهلاكية المختلفة ، أو توزيع النشاط الإعلاني على الوسائل الإعلانية المختلفة ، أو تخصيص عدد معين من الآلات لها استخدامات بديلة متعددة على هذه الاستخدامات . . . الخ .

ويمكن بيان طبيعة مشكلة التعيين بالاستعانة بالمثال المبسط الآتي :

مثال ١٠

سنفترض أن لدينا ثلاث آلات A ، B ، C يمكن أن تقوم كل منها بثلاث عمليات إنتاجية مختلفة 3 , 2 , 1 وأن معدل تكلفة تخصيص كل آلة لعملية معينة كما هو مبين بالجدول الآتي :

العملية / الآلة	1	2	3
A	12	6	4
B	8	8	14
C	10	14	14

لصياغة البرنامج الخطي لهذه المشكلة سنفترض أن $X_{ij} = 1$ إذا تم تخصيص الآلة i للعملية j، وأن $X_{ij} = 0$ إذا لم يتم تخصيص الآلة i للعملية j، ويكون المطلوب إيجاد قيم X_{ij} التي تصغر الدالة :

$$C = 12X_{11} + 6X_{12} + 4X_{13} + 8X_{21} + 8X_{22} + 14X_{23} + 10X_{31} + 14X_{32} + 14X_{33}$$

طبقا للشروط الآتية :

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1$$

$X_{ij} = 0$

أو

$X_{ij} = 1$

وإذا افترضنا أن لدينا موارد عددها m وأعمال عددها m، فإنه يمكن التعبير عن النمط العام لمشكلة التخصيص في جدول يشبه جدول النقل كالتالي :

الأعمال / الموارد	1	2	.	j	.	m	عدد الموارد
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	. . .	C_{1j} X_{1j}	. . .	C_{1m} X_{1m}	1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	. . .	C_{2j} X_{2j}	. . .	C_{2m} X_{2m}	1
⋮	.	.	. . .	.	. . .	.	⋮
i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	. . .	C_{ij} X_{ij}	. . .	C_{im} X_{im}	1
⋮	.	.	. . .	.	. . .	.	⋮
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	. . .	C_{mj} X_{mj}	. . .	C_{mm} X_{mm}	1
عدد الأعمال	1	1	. . .	1	. . .	1	m

حيث C_{ij} = تكلفة تخصيص المورد i للعمل j.

، $X_{ij} = 1$ إذا تم تخصيص المورد i للعمل j.

، $X_{ij} = 0$ إذا لم يتم تخصيص المورد i للعمل j.

ويمكن صياغة المشكلة في صورة برنامج خطي كالتالي:

ما هي قيم X_{ij} التي تصغر الدالة:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} \quad X_{ij}$$

طبقا للشروط الآتية:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$X_{ij} = 0$

أو

$X_{ij} = 1$

حل مشكلة التعيين

يمكن حل مشكلة التعيين باستخدام طريقة السمبلكس كأي برنامج خطي. ونظرا للتشابه بين صياغة هذه المشكلة وصياغة مشكل النقل فإنه يمكن حلها في وقت أقصر من طريقة السمبلكس باستخدام طرق حل مشكلة النقل، ولكن حل مشكلة التعيين باستخدام إحدى طرق حل مشكلة النقل سيكون طويلا لأنه دائما متحلل degenerate وذلك لأن الحل يقابله فقط m خانة مشغولة حيث إن عدد المتغيرات التي فيها $X_{ij} = 1$ يساوي m وبالتالي فإنه من الضروري شغل $(2m - 1) - m = m - 1$ خانة بالصفر في كل تقريب وذلك يجعل الحل طويلا.

وقد اقترحت طرق أخرى أكثر كفاءة من طريقة النقل لحل مشكلة التعيين لعل أشهرها الطريقة الهنغارية The Hungarian Method. وسنستعين بالمثال الآتي لشرح هذه الطريقة.

مثال ١١

سنفترض أن لدينا ثلاث آلات C ، B ، A يمكن أن تقوم كل منها بثلاث عمليات إنتاجية مختلفة 3 ، 2 ، 1 ، وأن معدل تكلفة تخصيص كل آلة لعملية معينة هو كما في الجدول الآتي :

الآلة \ العملية	1	2	3
A	12	6	4
B	8	8	14
C	10	14	14

يلاحظ أن هذه المشكلة بسيطة لأنها تتضمن ثلاثة موارد فقط ، ويمكن حلها بتكوين جدول يبين الحلول الممكنة لتخصيص الآلات على العمليات المختلفة ، والتكلفة المقابلة لكل تخصيص كالتالي :

التكلفة المقابلة لكل تخصيص	العمل 3	العمل 2	العمل 1
12 + 8 + 14 = 34	C	B	A
12 + 14 + 14 = 40	B	C	A
8 + 6 + 14 = 28	C	A	B
8 + 14 + 4 = 26	A	C	B
10 + 6 + 14 = 30	B	A	C
10 + 8 + 4 = 22	A	B	C

والتخصيص الذي يقابل أقل تكلفة هو تخصيص الآلة A لأداء العمل 3 والآلة B لأداء العمل 2 والآلة C لأداء العمل 1 . ويلاحظ أن عدد التكوينات الممكنة لتخصيص آلات عددها m على عمليات عددها m هو $m!$ ، ففي المثال السابق نجد

أن عدد التكوينات الممكنة 6 = 1 × 2 × 3 لأن عدد الموارد أو عدد الأعمال 3 ، ولكن عدد التكوينات الممكنة يصبح كبيرا كلما زاد عدد الموارد . فمثلا عندما يكون عدد الموارد 8، يصبح عدد التكوينات الممكنة 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8، أي يساوي 40320، وتصبح الطريقة السابقة غير عملية .

وسنستعين بالمثال المدروس لشرح إحدى الطرق العملية لحل مشكلة التخصيص والتي تعرف بالطريقة الهنغارية .

سنفترض أن لدينا مصفوفة معدل تكلفة تخصيص كل آلة لعملية معينة كالتالي :

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 4 \\ 8 & 8 & 14 \\ 10 & 14 & 14 \end{pmatrix}$$

١ - نطرح أصغر عنصر في كل عمود من جميع عناصر هذا العمود، فنحصل على المصفوفة الآتية :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

ثم نطرح أصغر عنصر في كل صف من جميع عناصر هذا الصف، فنحصل على المصفوفة الآتية :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ويمكن أن نبدأ بالأعمدة ثم بالصفوف أو العكس .

٢ - نختبر المصفوفة الناتجة لنرى ما إذا كانت تعطي حلا أمثل أم لا ، باستخدام الخانات المشغولة بالصفر فقط . نحيط بمربع الصفر في أي صف به صفر واحد فقط ، ونضع علامة × أما الأصفار في العمود المقابل للمربع . فإذا احتوت جميع الصفوف

على مربع في كل منها، فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، وإلا فنذهب للخطوة ٣.

٣ - نحيط بمربع الصفر في أي عمود به صفر واحد فقط، ونضع علامة X أما الأصفار في الصف المقابل للمربع. فإذا احتوت جميع الأعمدة على مربع في كل منها، فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، وإلا فنذهب للخطوة ٤.

نطبق الخطوة ٢ على المثال المدروس فنحصل على:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 2 & 10 \\ \boxed{0} & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

وبتطبيق الخطوة 3 نحصل على:

$$\begin{pmatrix} 4 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 2 & 10 \\ \boxed{0} & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

٤ - نرسم أقل عدد من الخطوط (عمودية أو رأسية أو عمودية ورأسية) تمر على جميع الأصفار في المصفوفة، ويساوي هذا العدد عدد الأصفار المحاطة بمربعات كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

٥ - نحدد أصغر عنصر في المصفوفة لا يمر به خط ونطرحه من كل عنصر لا يمر به خط ونضيفه إلى كل عنصر يمثل تقاطع خطين. في المثال المدروس نحصل على:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

٦ - نكرر الخطوة ٢ إلى الخطوة ٦ حتى نحصل على الحل الأمثل. في المثال المدروس نحصل على:

$$\begin{pmatrix} 6 & \cancel{0} & \boxed{0} \\ \cancel{0} & \boxed{0} & 8 \\ \boxed{0} & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

وحيث إن عدد الأصفار المحاطة بمربع يساوي عدد الموارد وهو 3 في المثال المدروس فإن الحل الأمثل هو الذي يقابل $X_{ij} = 1$ في الخانات التي بها أصفار محاطة بمربع و $X_{ij} = 0$ في باقي الخانات. أي إن التوزيع الأمثل هو تخصيص الآلة A للعمل 3، والآلة B للعمل 2، والآلة C للعمل 3، والتكلفة المقابلة لذلك هي 22، وهو الحل نفسه الذي حصلنا عليه بحصر جميع الحلول الممكنة.

مثال ١٢

سنفترض أن لدينا خمسة موارد يمكن أن تقوم كل منها بخمسة أعمال مختلفة، وأن معدل تكلفة تخصيص كل مورد لعملية معينة كما في الجدول الآتي:

العملية / المورد	1	2	3	4	5
1	8	15	6	9	4
2	6	11	7	7	3
3	13	9	10	15	7
4	9	13	8	12	7
5	4	7	12	11	6

يلاحظ أن إيجاد الحل الأمثل بواسطة حصر جميع الحلول الممكنة غير عملي لأنه سيكون لدينا $5! = 120$ حل ممكن، وسنستخدم الطريقة الهنغارية كمثال آخر لتطبيق هذه الطريقة.

١ – نطرح أصغر عنصر في كل عمود من جميع عناصر هذا العمود، فنحصل على المصفوفة الآتية:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

٢ - نطرح أصغر عنصر في كل صف من جميع عناصر الصف فنحصل على المصفوفة الآتية :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

٣ - نعيد كتابة المصفوفة السابقة كالتالي لاختبار ما إذا كانت تعطي حلا أمثل :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & \boxed{0} & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & \boxed{0} & \not{0} \\ 7 & \boxed{0} & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & \not{0} & 3 & 2 \\ \boxed{0} & \not{0} & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

يلاحظ أن الصف الأول به صفر واحد فنحيطه بمربع ونضع علامة X على الصفر المقابل في العمود الثالث، والصف الثالث به صفر واحد فنحيطه بمربع ونضع علامة X على الصفر المقابل في العمود الثاني . كذلك يلاحظ أن الصف الخامس به صفر واحد نحيطه بمربع .

ومن ناحية أخرى، نجد أن العمود الرابع به صفر واحد فنحيطه بمربع ونضع علامة X على الصفر المقابل في الصف الثاني .

نجد أن عدد المربعات التي تحيط أصفارا أربعة، بينما عدد الصفوف (الذي يساوي عدد الأعمدة) هو خمسة، وبالتالي فإن المصفوفة السابقة لا تعطي الحل الأمثل .

٤ - نغطي الأصفار في المصفوفة السابقة بأقل عدد من الخطوط كالتالي :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

فنجد أن أصغر عنصر غير مغطّى هو 1 فنطرح 1 من جميع عناصر المصفوفة غير المغطاة ونضيفه إلى عناصر المصفوفة التي تقابل تقاطع خطين، فنحصل على المصفوفة الآتية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 5 & 2 & \boxed{0} & \times \\ 6 & \boxed{0} & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 2 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

نجد في المصفوفة السابقة أن الصف الثالث به صفر واحد فنحيطه بمربع، كذلك الصف الرابع والصف الخامس. ومن ناحية أخرى نجد أن العمود الرابع به صفر واحد فنحيطه بمربع ونضع علامة X أمام الصفر المقابل في الصف الثاني. وأخيرا نجد أن العمود الخامس به صفر واحد فنحيطه بمربع ونحصل بالتالي على خمسة مربعات تحيط بخمسة أصفار، وعلى ذلك فإن الخانات المقابلة للمربعات هي التي تقابل التخصيصات المثلى فنحصل على:

$$X_{15}^{*} = X_{24}^{*} = X_{32}^{*} = X_{43}^{*} = X_{51}^{*} = 1$$

وفيما عدا ذلك تكون قيم $X_{ij}^{*} = 0$ والتكلفة المقابلة تساوي:

$$4 + 7 + 9 + 8 + 4 = 32$$

حالات خاصة لمشكلة التعيين

دالة الهدف في صورة تعظيم

إذا كان مقياس الفعالية في مشكلة التعيين يعبر عن تعظيم العائد أو الكفاءة الإنتاجية... الخ وليس تصغير التكلفة أو الوقت... الخ، فإن دالة الهدف تكون في صورة تعظيم. ويمكن دراسة هذه الحالة كما في مشكلة النقل بأن نحسب أولا تكلفة الفرصة الضائعة لكل صف ثم نسير في إجراءات الحل العادية.

عدم تساوي عدد الموارد وعدد الأعمال

تعتمد طريقة حل مشكلة التعيين على تساوي عدد الموارد وعدد الأعمال، فإذا كان عدد الموارد أكبر من عدد الأعمال نكون عملا صوريا، وإذا كان عدد الموارد أقل من عدد الأعمال نكون موردا صوريا ونفترض أن التكلفة أو العائد المقابل للعمل أو المورد الصوري تساوي صفرا.

مثال ١٣

سنفترض أن لدينا أربعة أشخاص وثلاثة أعمال، وأن معدل العائد المقابل لتخصيص شخص معين لأداء عمل معين كما هو مبين بالجدول الآتي :

الأعمال / الأشخاص	1	2	3
1	60	50	90
2	20	0	80
3	30	70	90
4	80	100	60

نكون عملا صوريا جديدا ونضع العائد المقابل له مساويا لصفر كالتالي :

الأعمال / الأشخاص	1	2	3	4
1	60	50	90	0
2	20	0	80	0
3	30	70	90	0
4	80	100	60	0

عدم تساوي عدد الموارد وعدد الأعمال

تعتمد طريقة حل مشكلة التعيين على تساوي عدد الموارد وعدد الأعمال، فإذا كان عدد الموارد أكبر من عدد الأعمال نكون عملا صوريا، وإذا كان عدد الموارد أقل من عدد الأعمال نكون موردا صوريا ونفترض أن التكلفة أو العائد المقابل للعمل أو المورد الصوري تساوي صفرا.

مثال ١٣

سنفترض أن لدينا أربعة أشخاص وثلاثة أعمال، وأن معدل العائد المقابل لتخصيص شخص معين لأداء عمل معين كما هو مبين بالجدول الآتي :

الأعمال / الأشخاص	1	2	3
1	60	50	90
2	20	0	80
3	30	70	90
4	80	100	60

نكون عملا صوريا جديدا ونضع العائد المقابل له مساويا لصفر كالتالي :

الأعمال / الأشخاص	1	2	3	4
1	60	50	90	0
2	20	0	80	0
3	30	70	90	0
4	80	100	60	0

نوجد تكلفة الفرصة الضائعة في كل صف بطرح كل عنصر في الصف من أكبر عنصر فيه، فنحصل على المصفوفة الآتية:

$$\begin{bmatrix} 30 & 40 & 0 & 90 \\ 60 & 80 & 0 & 80 \\ 60 & 20 & 0 & 90 \\ 20 & 0 & 40 & 100 \end{bmatrix}$$

ونطرح أصغر عنصر في كل عمود من عناصر العمود فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 10 & 40 & 0 & 10 \\ 40 & 80 & 0 & 0 \\ 40 & 20 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 40 & 20 \end{bmatrix}$$

يلاحظ في المصفوفة السابقة أن كل صف أو كل عمود به صفر واحد على الأقل، وأن أقل عدد من الخطوط يمكن أن نغطي به الأصفار هو 3، ونجد أن أصغر عنصر لا يمر به خط هو 10، فنطرحه من جميع العناصر التي لا يمر بها خط، ونضيفه إلى العنصر الذي يمثل تقاطع خطين، فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 30 & \cancel{0} & 10 \\ 30 & 70 & 0 & \boxed{0} \\ 30 & 10 & \boxed{0} & 10 \\ \cancel{0} & \boxed{0} & 50 & 30 \end{bmatrix}$$

وكما في الأمثلة السابقة نجد أن الحل الأمثل هو:

$$X_{11}^* = X_{42}^* = X_{33}^* = X_{24}^* = 1$$

وأن $X_{ij}^* = 0$ فيما عدا ذلك، وأن العائد المقابل لذلك هو:

$$60 + 100 + 90 = 250$$

تطبيقات

١ - ترغب مؤسسة في نقل إنتاجها من مصانعها الثلاثة إلى ثلاثة مراكز توزيع، فإذا علمت أن الطاقة الإنتاجية للمصنع الأول 300، والثاني 400، والثالث 200، والطاقة الاستيعابية لمركز التوزيع الأول 200، والثاني 350، والثالث 250، وكان جدول تكلفة نقل الوحدة كالتالي:

مراكز التوزيع

المصانع		1	2	3
	1	13	14	10
	2	12	8	11
	3	6	10	13

والمطلوب:

أ) إعداد جدول النقل المبدئي باستخدام طريقة تقريب ڤوجل واختبار أمثليته باستخدام طريقة الحجر المتحرك.

ب) إعداد جدول النقل المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي، ثم استخدام طريقة التوزيع المعدل (المؤشرات) في إيجاد الحل الأمثل.

٢ - تقوم مؤسسة بتوزيع إنتاجها من ثلاثة مصانع إلى أربعة أسواق وفقا لجدول النقل الآتي:

	1	2	3	4
1	19	7	3 100	21
2	15 150	21 100	18	6 50
3	11	14	15 100	21 100

تطبيقات

١ - ترغب مؤسسة في نقل إنتاجها من مصانعها الثلاثة إلى ثلاثة مراكز توزيع، فإذا علمت أن الطاقة الإنتاجية للمصنع الأول 300، والثاني 400، والثالث 200، والطاقة الاستيعابية لمركز التوزيع الأول 200، والثاني 350، والثالث 250، وكان جدول تكلفة نقل الوحدة كالتالي:

مراكز التوزيع

المصانع		1	2	3
	1	13	14	10
	2	12	8	11
	3	6	10	13

والمطلوب:

أ) إعداد جدول النقل المبدئي باستخدام طريقة تقريب ڤوجل واختبار أمثليته باستخدام طريقة الحجر المتحرك.

ب) إعداد جدول النقل المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي، ثم استخدام طريقة التوزيع المعدل (المؤشرات) في إيجاد الحل الأمثل.

٢ - تقوم مؤسسة بتوزيع إنتاجها من ثلاثة مصانع إلى أربعة أسواق وفقا لجدول النقل الآتي:

	1	2	3	4
1	19	7	3 100	21
2	15 150	21 100	18	6 50
3	11	14	15 100	21 100

باستخدام طريقة الحجر المتحرك :

أ) بين أن هذا التوزيع غير أمثل .

ب) أوجد التوزيع الأمثل .

٣ - فيما يلي البرنامج الخطي لأحد مشكلات النقل :

$$\min C = 18X_{11} + 24X_{12} + 8X_{13} + 16X_{21} + 23X_{22} + 28X_{23}$$

طبقا للشروط الآتية :

$$\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} + X_{13} &= 450 \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} &= 200 \\
X_{11} + X_{21} &= 250 \\
X_{12} + X_{22} &= 200 \\
X_{13} + X_{23} &= 200 \\
X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23} &\geq 0
\end{aligned}$$

أ) كون البرنامج البديل .

ب) استخدم مبدأ التكامل في بيان كيفية إيجاد المؤشرات في طريقة التوزيع المعدل .

جـ) استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي ثم طريقة التوزيع المعدل في إيجاد الحل الأمثل للبرنامج السابق .

٤ - تقوم مؤسسة بتوزيع إنتاجها من أربعة مصانع إلى ثلاثة أسواق بحيث توزع من المصنع الأول للسوق الأول 1100 وحدة، وللسوق الثالث 900 وحدة، وتوزع من المصنع الثاني للسوق الثالث 1000 وحدة، ومن المصنع الثالث للسوق الأول 900 وحدة، وللسوق الثاني 600 وحدة، ومن المصنع الرابع للسوق الثاني 1500 وحدة. ويبلغ معدل تكلفة النقل من المصنع الأول إلى السوق الأول 7، وإلى الثاني 5، وإلى الثالث 7، ومن المصنع الثاني إلى السوق الأول 9، وإلى الثاني 6، وإلى

الثالث 6، ومن المصنع الثالث إلى السوق الأول 8، وإلى الثاني 5، وإلى الثالث 8، ومن المصنع الرابع إلى السوق الأول 8، وإلى الثاني 4، وإلى الثالث 10 .

والمطلوب :

أ) استخدام طريقة التوزيع المعدّل في بيان أن المؤسسة تقوم بتوزيع إنتاجها بطريقة مثلى .

ب) هل يوجد توزيع أمثل آخر؟

جـ) إذا تبين وجود توزيع أمثل آخر أوجده .

٥ - سنفترض أن لدى مؤسسة ثلاثة مصانع وتوزع إنتاجها على سوقين مختلفين، ويبلغ معدل ربح السوق الأول 18، والسوق الثاني 16، ومعدل تكلفة النقل من المصنع الأول إلى السوق الأول 6، وإلى السوق الثاني 7، ومن المصنع الثاني إلى السوق الأول 8، وإلى السوق الثاني 4، ومن المصنع الثالث إلى السوق الأول 7، وإلى السوق الثاني 8، والطاقة الإنتاجية للمصنع الأول 2000، وللثاني 2500، وللثالث 1500، والطاقة الاستيعابية للسوق الأول 2500، وللسوق الثاني 3500 .

والمطلوب تكوين جدول النقل المبدئي بدلالة تكلفة الفرصة البديلة ثم إيجاد الحل الأمثل .

٦ - نفترض أن لدينا مصنعين وثلاثة أسواق، وأن معدل تكلفة النقل من المصنع الأول إلى السوق الأول 10، وإلى السوق الثاني 8، وإلى السوق الثالث 7، ومن المصنع الثاني إلى السوق الأول 9، وإلى السوق الثاني 7، وإلى السوق الثالث 11، وأن إنتاج المصنع الأول 6000، والمصنع الثاني 4000، وأن الطاقة الاستيعابية للسوق الأول 3000، وللثاني 5000، وللثالث 2000 . سنفترض أن تكلفة إنتاج الوحدة في المصنع الأول 70، وفي المصنع الثاني 75 .

والمطلوب :

أ) إعداد جدول النقل .

ب) استخدام طريقة تقريب ڤوجل في إيجاد الحل المبدئي.

جـ) استخدام طريقة الحجر المتحرك في اختبار أمثلية الحل الذي حصلت عليه في ب.

٧ - سنفترض أن الطلب على منتج معين في خلال ثلاث فترات متتالية هو 400 للفترة الأولى، و300 للفترة الثانية و380، للفترة الثالثة، وأن الطاقة الإنتاجية خلال الفترة الزمنية الواحدة 340، في الوقت العادي و 100 في الوقت الإضافي وتكلفة تخزين الوحدة في الفترة 8، ومعدل التكلفة في الوقت العادي 30، وفي الوقت الإضافي 40.

كون جدولا مشابها لجدول النقل للمشكلة السابقة وذلك لإيجاد الخطة المثلى لتوزيع الإنتاج والمخزون خلال الفترات الثلاث.

ب) استخدام طريقة تقريب ڤوجل في إيجاد الحل المبدئي .
جـ) استخدام طريقة الحجر المتحرك في اختبار أمثلية الحل الذي حصلت عليه في ب .

٧ - سنفترض أن الطلب على منتج معين في خلال ثلاث فترات متتالية هو 400 للفترة الأولى، و300 للفترة الثانية و380، للفترة الثالثة، وأن الطاقة الإنتاجية خلال الفترة الزمنية الواحدة 340، في الوقت العادي و 100 في الوقت الإضافي وتكلفة تخزين الوحدة في الفترة 8، ومعدل التكلفة في الوقت العادي 30، وفي الوقت الإضافي 40 .

كون جدولا مشابها لجدول النقل للمشكلة السابقة وذلك لإيجاد الخطة المثلى لتوزيع الإنتاج والمخزون خلال الفترات الثلاث .

الباب الثاني

تحليل شبكة الأعمال باستخدام أسلوب تقويم البرامج ومراجعتها وأسلوب المسار الحرج

● المقدمة ● جدولة أوقات تنفيذ أنشطة المشروع وتحديد المسار الحرج ●استخدام الأوقات الثلاثة المقدرة لتنفيذ أنشطة المشروع في أسلوب تقويم البرامج ومراجعتها ● استخدام التحليل الشبكي في اختصار أزمنة التنفيذ مع أقل تكلفة ممكنة



المقدمة

يتكون المشروع من مجموعة من الأنشطة activities المرتبطة التي يجب تنفيذها بترتيب معين بحيث لا يمكن أن يبدأ بعض هذه الأنشطة قبل انتهاء تنفيذ أنشطة أخرى، وبعضها يمكن تنفيذه في الوقت نفسه، ويتطلب ذلك التنسيق بينها من حيث توقيت بدء تنفيذ كل منها وانتهائه حتى لا تحدث اختناقات في بعض أجزاء المشروع تؤدي إلى تأخير تنفيذه في الوقت المحدد، وقد يترتب على ذلك تأخير تنفيذ مشروعات أخرى مرتبطة به.

ويستخدم أسلوب تقويم البرامج ومراجعتها Project Evaluation and Review Technique (وباختصار PERT) وطريقة المسار الحرج The Critical Path Method (وباختصار CPM) في تخطيط وجدولة الأنشطة الخاصة بمشروع معين لتنفيذه في أقل وقت ممكن، وذلك بفرض تقسيم المشروع إلى عدد من الأنشطة التي تتم في تتابع معين، ثم يتم التعبير عنها في شكل شبكة network تمثل هذه الأنشطة وتأخذ في الاعتبار علاقاتها التتابعية، ثم جدولة أنشطة المشروع أي تحديد أوقات بدايات تنفيذ الأنشطة ونهاياتها، وكذلك تحديد الأنشطة التي يترتب على تأخيرها تأخير تنفيذ المشروع والتي تعرف بالأنشطة الحرجة critical activities، والأنشطة التي يمكن أن تتأخر بدايتها لفترة معينة دون أن يتأخر تنفيذ المشروع، وهي التي تعرف بالأنشطة التي بها فائض.

ويركز أسلوب تقويم البرامج ومراجعتها على عنصر الوقت ويعتمد على أن تقدير الوقت المخصص لتنفيذ أنشطة المشروع يدخل فيه العنصر الاحتمالي، ولذلك يستخدم في حالة المشروعات التي تتصف بعدم التأكد بالنسبة لأوقات تنفيذ أنشطتها، مثل مشروعات البحث العلمي والمجالات الإنتاجية الجديدة . . . الخ .

وتعتمد طريقة المسار الحرج على أن أوقات تنفيذ أنشطة المشروع محددة (غير احتمالية)، ويستخدم بصفة عامة في حالة المشروعات التي تتعرض لدرجة محدودة من التغيير مثل مشروعات الإنشاء والتشييد كبناء المنازل وتشييد الكباري . . . الخ .

وقد انتشر تطبيق هذين الأسلوبين منذ أواخر الخمسينيات في جدولة أنشطة المشروعات الكبيرة ومتابعة تنفيذها، مثل مشروعات البترو كيماويات والتعدين والمباني ومشروعات الخدمات كالخدمات الصحية وإدارة الحاسبات الآلية وتشغيل البيانات والخدمات المصرفية . . . الخ . وقد تطور كل من الأسلوبين واندمج في الآخر ليكونا معا أسلوب تحليل الشبكات Network Analysis .

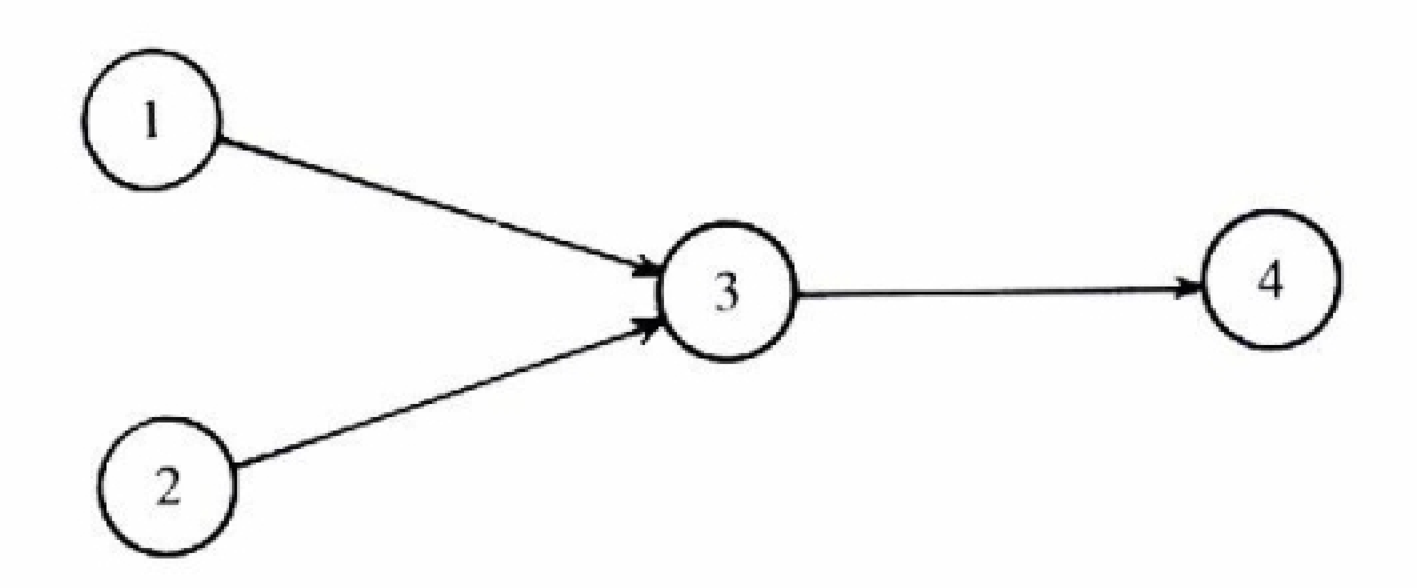
الفصل السادس

جدولة أوقات تنفيذ أنشطة المشروع وتحديد المسار الحرج

● شبكــة أعمال المشروع ● الوقت المبكر للحدث ● تحديد المسار الحرج
● الوقت المتأخر للحدث ● جدولة أوقات تنفيذ أنشطة المشروع

شبكة أعمال المشروع

تبدأ الخطوةالأساسية لتحديد الجدول الزمني للمشروع بتقسيمه إلى أجزاء أو أنشطة، ويتطلب ذلك خبرة بتصميم المشروعات . ويتم رسم هذه الأنشطة في صورة خريطة تدفق flow chart أو شبكة network حيث يتم تمثيل الأنشطة بواسطة أسهم arrows توضح علاقة التبعية بين نشاط وآخر، وتعرف بداية كل نشاط ونهايته بالحدث event ، والأنشطة التي تخرج من حدث معين لايمكن أن تبدأ إلا بعد تنفيذ الأنشطة التي تنتهي عند هذا الحدث . ويمثل كل نشاط بسهم يشير إلى اتجاه النشاط، ويمثل كل حدث بعقدة a node، ويمكن الإشارة إلى النشاط بالحدث السابق له وبالحدث اللاحق له . فعلى سبيل المثال يمثل شكل (١) الأنشطة (3 1) و (3 2) و (4 3)، حيث إن النشاطين (3 1) و(3 2) . يمكن تنفيذهما في الوقت نفسه، ومن ناحية أخرى لايمكن البدء في النشاط (4 3) إلا بعد الانتهاء من كل من النشاطين (3 1) و(3 2) .

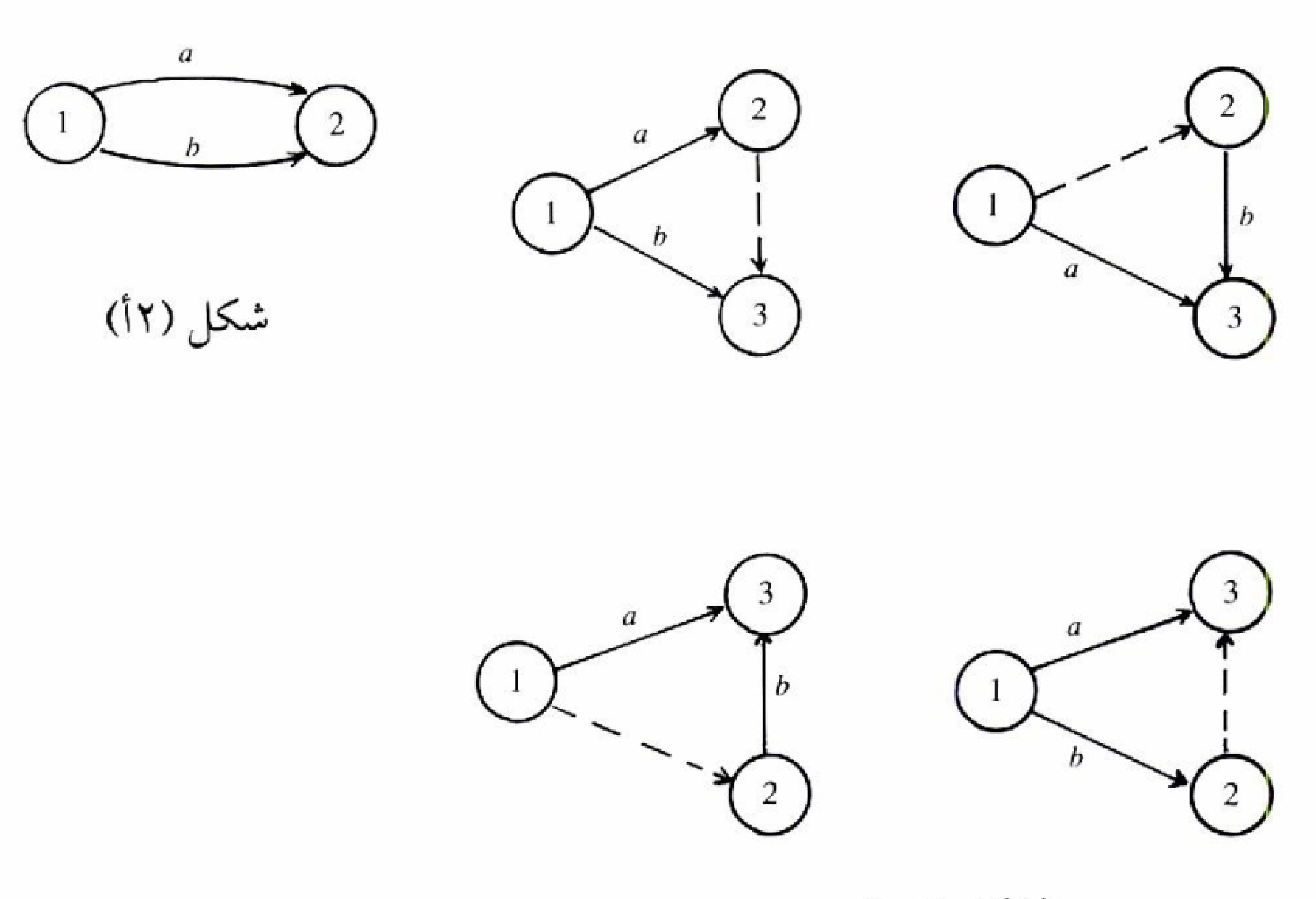


شكل (١)

ويمكن تلخيص قواعد تكوين الشبكة التي تمثل أنشطة المشروع فيما يلي :

١ - يتم تمثيل كل نشاط بسهم واحد في الشبكة .

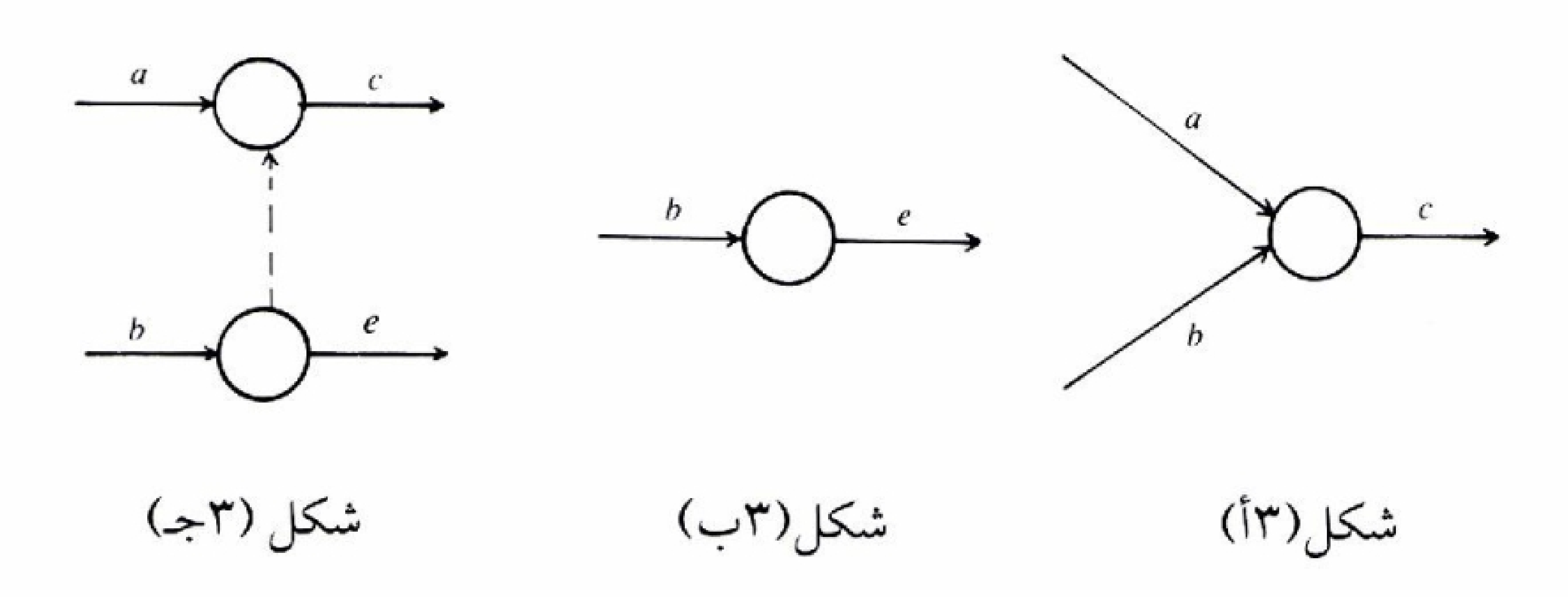
٢ - لايتم تمثيل نشاطين (أو أكثر) بحدثي البداية والنهايةنفسيهما ، ففي شكل (٢أ) نجد أن النشاطين a,b لهما نفس حدثي البدايةوالنهاية . ولتمثيل ذلك وفقاً لهذه القاعدة نفترض نشاطاً صورياً a dummy activity حتى يكون لكل نشاط نهاية منفصلة كما في الشكل (٢ب) .



شكل (٢أ)

(شكل ٢ب)

وتفيد الأنشطة الصورية في تمثيل علاقات منطقية في شبكة الأسهم لا يمكن تمثيلها إلا بواسطة هذه الشبكة، ولتوضيح ذلك سنفترض أن النشاطين a,b في مشروع معين يسبقان النشاط c، وتمثيل ذلك في الشكل (٣أ)، ومن ناحية أخرى نفترض أن النشاط e يسبقه النشاط b فقط، وتمثيل ذلك في شكل (٣ب)، والتمثيل الصحيح للشرطين السابقين كما في الشكل (٣جـ).



شكل (٣جـ)   شكل(٣ب)   شكل(٣أ)

والنشاط الصوري لايقابله وقت أو موارد.

٣ - عند إضافة نشاط معين للشبكة يجب أن نحدد:

أ) الأنشطة التى يجب تنفيذها مباشرة قبل هذا النشاط.

ب) الأنشطة التى يجب أن تتبع هذا النشاط.

جـ) الأنشطة التى يمكن أن تحدث في نفس ا لوقت مع هذا النشاط.

مثال ١:

نفترض أن الأنشطة اللازمة لبناء منزل والوقت المتوقع لتنفيذ كل نشاط كما هو

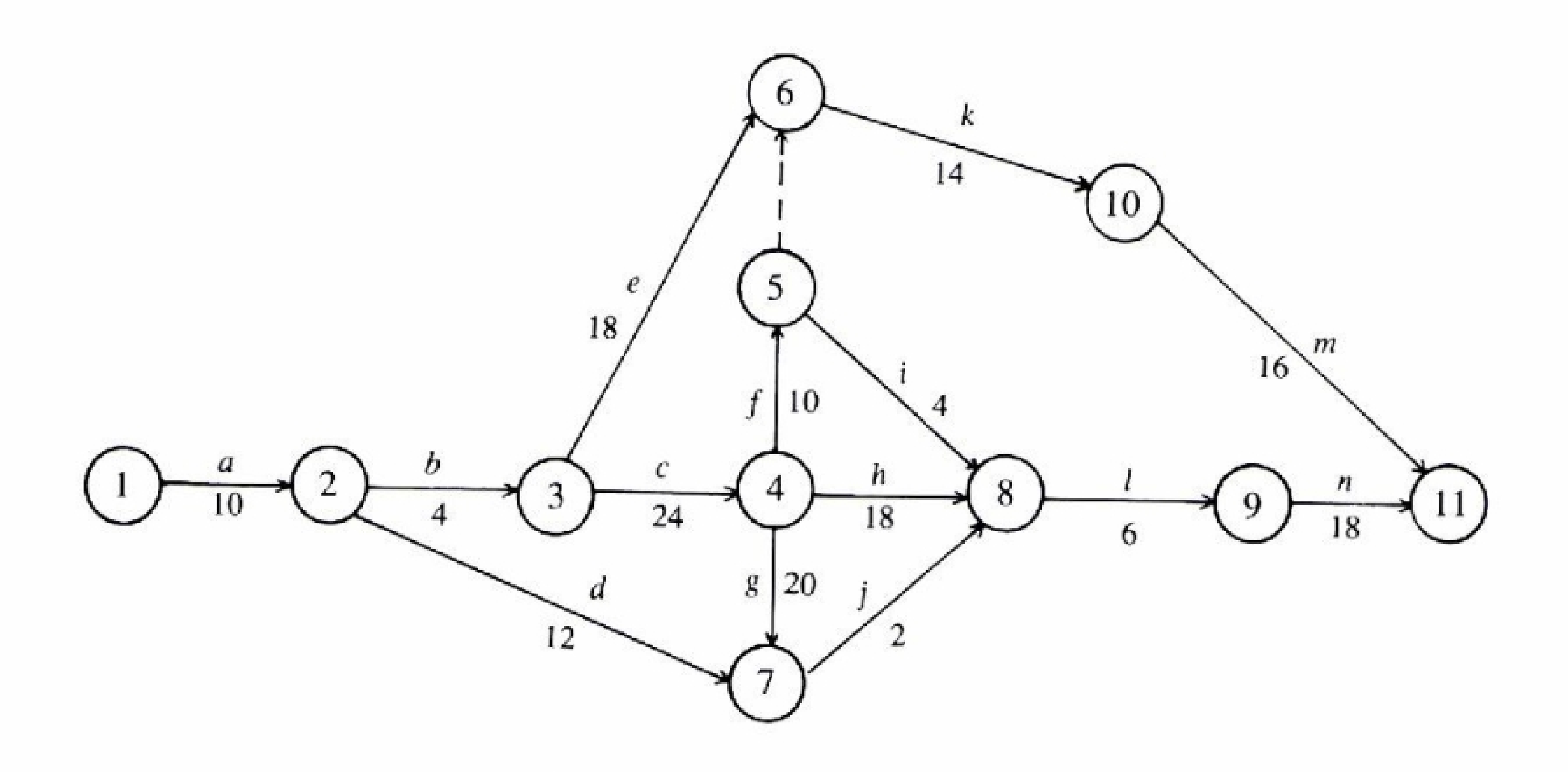
مبين بالجدول الآتي :

جدول (١)

الوقت المتوقع لتنفيذ النشاط	الحدث السابق واللاحق	النشاط السابق مباشرة	نوع النشاط	النشاط
10 يوم	1-2	-	حفر الآبار وإرساء الأساسات	a
4	2-3	a	إقامة الأعمدةوالأسقف	b
24	3-4	b	إقامة الجدران	c
12	2-7	a	تركيب المواسير الخارجية	d
18	3-6	b	أعمال النجارة	e
10	4-5	c	أعمال تكييف الهواء	f
20	4-7	c	تركيب المواسير الداخلية	g
18	4-8	c	التوصيلات الكهربائية	h
4	5-8	f	أعمال السمكرة	i
2	7-8	d,g	فحص المواسير	j
14	6-10	e,f	الطلاء الخارجي	k
6	8-9	i,j,h	إنهاء أعمال النجارة	l
16	10-11	k	توصيل الكهرباء	m
18	9-11	l	الطلاء الداخلي	n

ويوضح شكل (٤) شبكة أعمال المشروع السابق وفقاً للقواعد الخاصة برسم الشبكة التي ذكرناها .

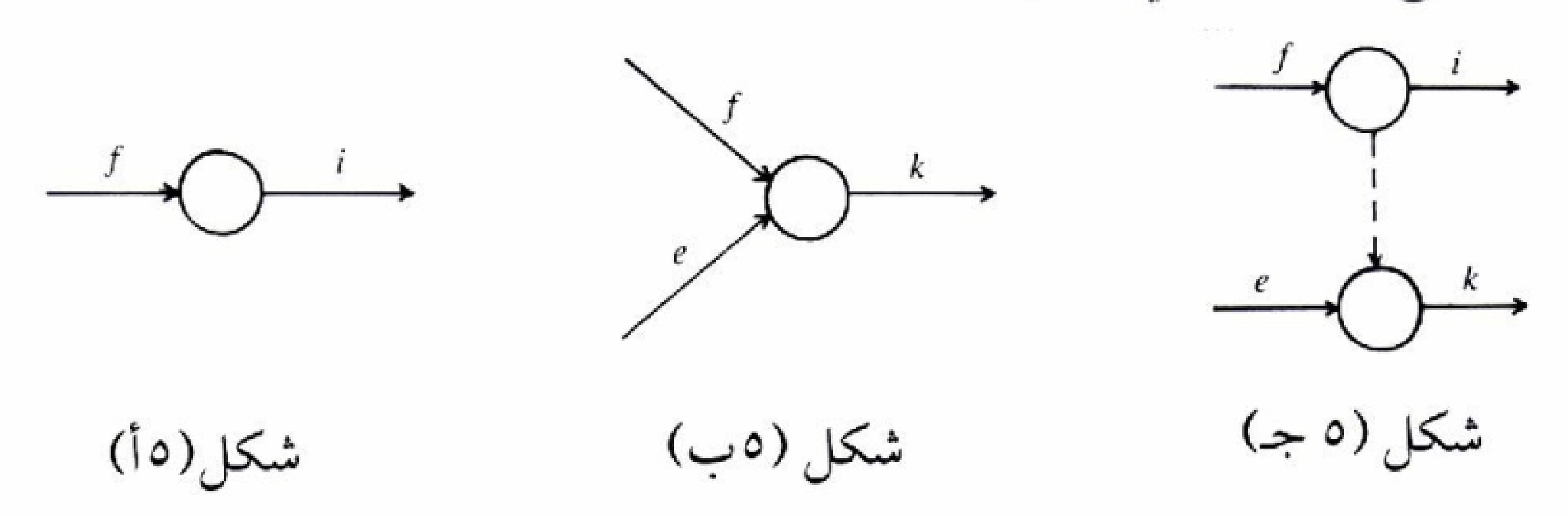
نجد في شكل (٤) أن النشاط a الخاص بحفر الآبار وإرساء الأساسات يجب أن يكون قبل النشاط b الخاص بإقامة الأعمدة والأسقف ، وأن النشاط b يجب أن يتم قبل النشاط c الخاص بإقامة الجدران ، هكذا ، ونجد أيضاً أن النشاطين c,e يبدآن من العقدة 3 وتمثل هذه العقدة أو الحدث النقطة الزمنية التي يتم عندها تنفيذ النشاط



شكل (٤)

b. وتتكون شبكة أعمال المشروع الذي يتم دراسته من 11 عقدة تمثل 11 حدثاً، ويشير الحدث إلى نقطة بداية أو نهاية نشاط أو أكثر، ومن المناسب ترقيم الأحداث بحيث يبدأ كل نشاط برقم حدث أصغر من الرقم الخاص بالحدث التالي الذي ينتهي إليه النشاط، ويلاحظ أن الأحداث نفسها لاتستغرق وقتاً ولاتستهلك موارد وتستخدم كنقط ارتكاز milestones وتعطي أساساً منطقيا لربط مختلف الأنشطة. ويلاحظ في شكل (٤) أن هناك أنشطة تتم في صورة سلسلة تشير إلى أن كل نشاط لايبدأ إلابعد أن يتم تنفيذ النشاط السابق له، ويمكن لمثل هذه السلسلة أن تكون مساراً خاصاً خلال الشبكة من حدث البداية إلى حدث النهاية مثل السلسلة *a, b, c, h, l, n*، وهناك أنشطة تحدث في الوقت نفسه مثل النشاطين *d,g* والأنشطة *d, h, f* والنشاطين *n, k* وبصفة عامة لايجب تمثيل الأنشطة في صورة سلسلة إلا إذا كان ذلك ضرورياً فعندما يكون ممكناً تنفيذ نشاطين أو أكثر في الوقت نفسه فإن ذلك يجب أن يعبر عنه في شبكة المشروع، ويؤدي ذلك إلى مرونة أكبر في التنفيذ لتخفيض مدة تنفيذ المشروع. ويلاحظ في شكل (٤) أن هناك نشاطاً صورياً يربط بين الحدثين 5,6، هذا النشاط ضروري لحفظ التسلسل المنطقي للأنشطة حيث نجد أن النشاط i مسبوق

بالنشاط f ، والنشاط k مسبوق بالنشاطين f,e كما في شكل (٥أ، ب) والتمثيل الصحيح لذلك كما في شكل (٥جـ).



شكل (٥أ) شكل (٥ب) شكل (٥ جـ)

الوقت المبكر للحدث Earliest Possible Event Times

ذكرنا من قبل أن الحدث هو نقطة زمنية تمثل إما نهاية نشاط أو مجموعة من الأنشطة المتوازية أو بداية نشاط أو أكثر، ، ويمثل الحدث نقطة ارتكاز تصل بين مجموعة الأنشطة السابقة لها مباشرة والأنشطة اللاحقة لها مباشرة. فعلى سبيل المثال، يقع الحدث 4 في تخطيط بناء المنزل في المثال المدروس عندما ينتهي النشاط c وقبل بداية كل من الأنشطة g, h, f . فإذا أردنا جدولة كل نشاط بحيث يبدأ بأسرع مايمكن، فإن الوقت الذي يمكن أن يبدأ فيه نشاط معين لايمكن أن يكون متأخرا عن الوقت المبكر للحدث السابق له. وسنستخدم الحروف ES للإشارة إلى الوقت المبكر للحدث، وسنضع ES في مربع بجوار الحدث المقابل وتكون ES للحدث 1 مساوية للصفر، ويعتمد حساب ES لحدث معين على قيمة ES للأحداث السابقة له مباشرة بالاضافة إلى فترة تنفيذ الأنشطة التي تربط هذه الأحداث بالحدث المدروس.

ويوضح شكل (٦) كيفية تطبيق هذه الطريقة، فالحدث 2 يرتبط بالحدث 1 بالنشاط a الذي يستغرق عشرة أيام. وعلى ذلك، فإن ES للحدث 2 هي 10=10+0، والحدث 2 يحدث في نهاية اليوم العاشر للمشروع، وبالمثال تحصل على ES للحدث 3 بإضافة ES للحدث 2 إلى فترة تنفيذ النشاط b، أي 14=4+10، وتحسب ES للحدث 4 بإضافة هذا الوقت إلى وقت حدوث النشاط c أي 38=24+14.

وعندماينتهي نشاطان أو أكثر عند حدث معين، فإن هذا الحدث لايحدث حتى يكتمل هذان النشاطان، وعلى ذلك فإن ES المرتبطة بهذا الحدث تحسب على

أساس العلاقة :

$$ES_j = \max_i \left[ES_i + D_{ij}\right]$$

وذلك لجميع الأنشطة $i\,j$

حيث : j هو رقم الحدث الذي نحسب له ES،

i تشير إلى الأحداث التي تسبق هذا الحدث والتي تخرج منها أنشطة تنتهي عند الحدث رقم j.

و D_{ij} تشير إلى فترة تنفيذ النشاط الذي يربط بين الحدث i والحدث j.

وسنأخذ على سبيل المثال الحدث 7حيث ينتهي النشاطان d,g الخارجان من الحدثين 2,4 ، ، نحصل على :

$$ES_7 = \max\left[ES_2 + 12,\ ES_4 + 20\right]$$
$$= \max\,[10 + 12,\ 38 + 20] = \max\,[22,\ 58] = 58$$

وبالمثل، بالنسبة للحدث 8 الذي تنتهي عنده الأنشطة j, h, i الخارجة من الأحداث 7, 4, 5، ونحصل على :

$$ES_8 = \max\left[ES_7 + 2,\ ES_4 + 18,\ ES_5 + 4\right]$$
$$= \max\,[58 + 2,\ 38 + 18,\ 48 + 4] = 60$$

وهكذا بالنسبة لباقي الأحداث .

معنى ذلك أن الوقت المبكر للحدث ES يساوي أطول فترة لجميع مسارات الأنشطة المؤدية لهذا الحدث ابتداء من الحدث الأول في الشبكة . فعلى سبيل المثال، تؤدي المسارات a - d ، a - b - c - g للحدث 7 في الشبكة، وأوقات هذه المسارات هي :

للممر a - d : $10 + 12 = 22$

وللممر a - b - c - g : $10 + 4 + 24 + 20 = 58$

ويستغرق أطول مسار للحدث 7، 58 يوماً، تمثل هذه الفترة ES للحدث 7 أي ES_7 .

وبالمثل، فإن الحدث 8 له أربعة مسارات تؤدي إليه، وفترة هذه المسارات هي:

للمسار $a - d - j$

$$10 + 12 + 2 = 24$$

وللمسار $a - b - c - g - j$

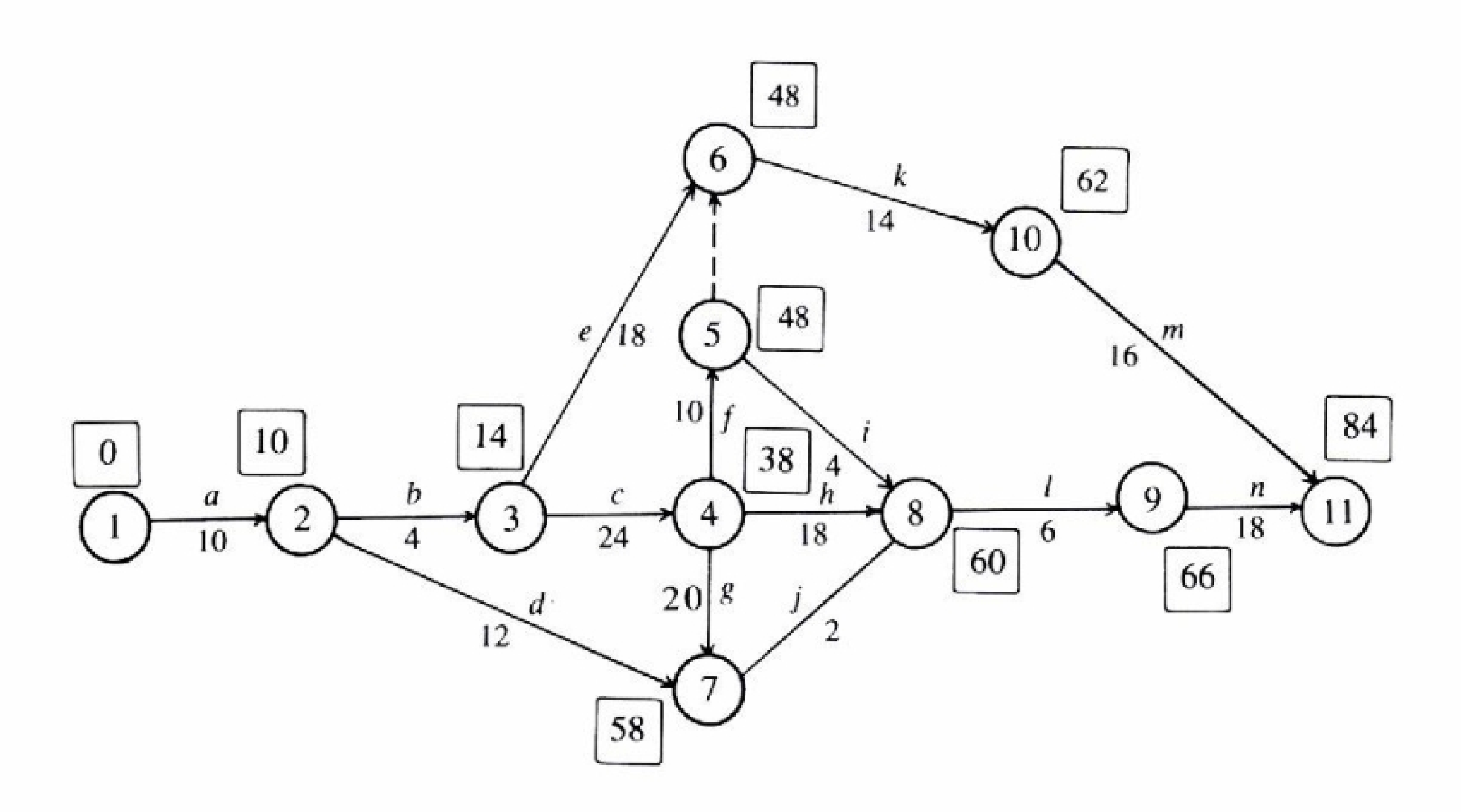
$$10 + 4 + 24 + 20 + 2 = 60$$

وللمسار $a - b - c - h$

$$10 + 4 + 24 + 18 = 56$$

وللمسار $a - b - c - f - i$

$$10 + 4 + 24 + 10 + 4 = 52$$



شكل (٦)

تحديد المسار الحـــرج The Critical Path

المسار الحرج هو المسار الذي يستغرق أطول فترة ممكنة خلال شبكة أعمال المشروع من البداية إلى النهاية، وتساوي مدة المسار الحرج *ES* للحدث الأخير في المشروع، أي للحدث 11 في المثال المدروس، ولايمكن الوصول إلى هذا الحدث

إلابعد 84 يوم عـمل من البـداية ، ، وهي الوقت المبكر للانتـهـاء من جـمـيع الأنشطة وبالتالي للانتهاء من المشروع ككل . والمسار الحرج في المثال المدروس هو الذي يعبر عنه بالأنشطة : $a - b - c - g - j - i - l - n$. ويمكن تعريف المسار الحرج أيضاً بدلالة سلسلة الأحداث . ففي المثال السابق ، يتكون المسار الحرج من الأحداث :- 3 - 2 - 1 11 - 9 - 8 - 7 - 4 ، ويلاحظ أنه يمكن أن يكون للمشروع أكثر من سلسلة من الأنشطة التي تأخذ أكبر فترة ممكنة ، وفي هذه الحالة يكون له أكثر من مسار حرج ، وتعرف الأنشطة التي تقع على المسار الحرج بالأنشطةالحرجة critical activities .

الوقت المتأخــــر للحدث Latest Allowable Event Time

يلاحظ أنه ليس من الضـروري أن تبـدأ جـمـيع الأنشطة في أوقـاتهـا المبكرة ، فالأنشطة غير الحرجة يمكن أن تبدأ متأخرة بدون تأخير المشروع . وسنشير إلى الوقت المتأخر للحدث i بالرمز LF_i ، ، سنضعه في دائرة بجوار الحدث المقابل* وتمثل قيمة LF_i النقطة الزمنية التي يقع عندها الحدث i قبل أن يحدث تأخير متوقع في الأنشطة التالية ، وبالتالي في المشروع كله . وسنعتبر الحدث 10 على سبيل المثال هو الذي يتبع النشاط k ، ويجب أن تحدث هذه النقطة قبل الوقت المتأخر المقابل وهو 68 ، وإلا فإننا لانتوقع أن ينتهي المشروع في أقصر وقت ممكن ، ، هو 84 يوم عمل ، لأنه عند الحدث 10 يكون هناك 16 يوماً باقية للانتهاء من تنفيذ المشروع .

ولحـسـاب قـيم LF_i ، نبـدأ عند نهـاية المشـروع ، ونضع ES = LF للحـدث الأخير ، أي أن $LF_{11} = 84$ ، وبطرح عدد الأيام اللازمة لتنفيذ النشاط n ، وهو 18 يوماً من هذا الوقت ، نحـصـل على LF_9 ، أي 66 = 18 - 84 ، وبتكرار ذلك للحـدث 8 نحصل على : $LF_8 = 66 - 6 = 60$ ونستمر بهذه الطريقة حتى نصل إلى حدث يمثل نقطة بداية لأكثر من نشاط ، كالحدث 4 ، علي سبيل المثال ، الذي يمثل بداية الأنشطة

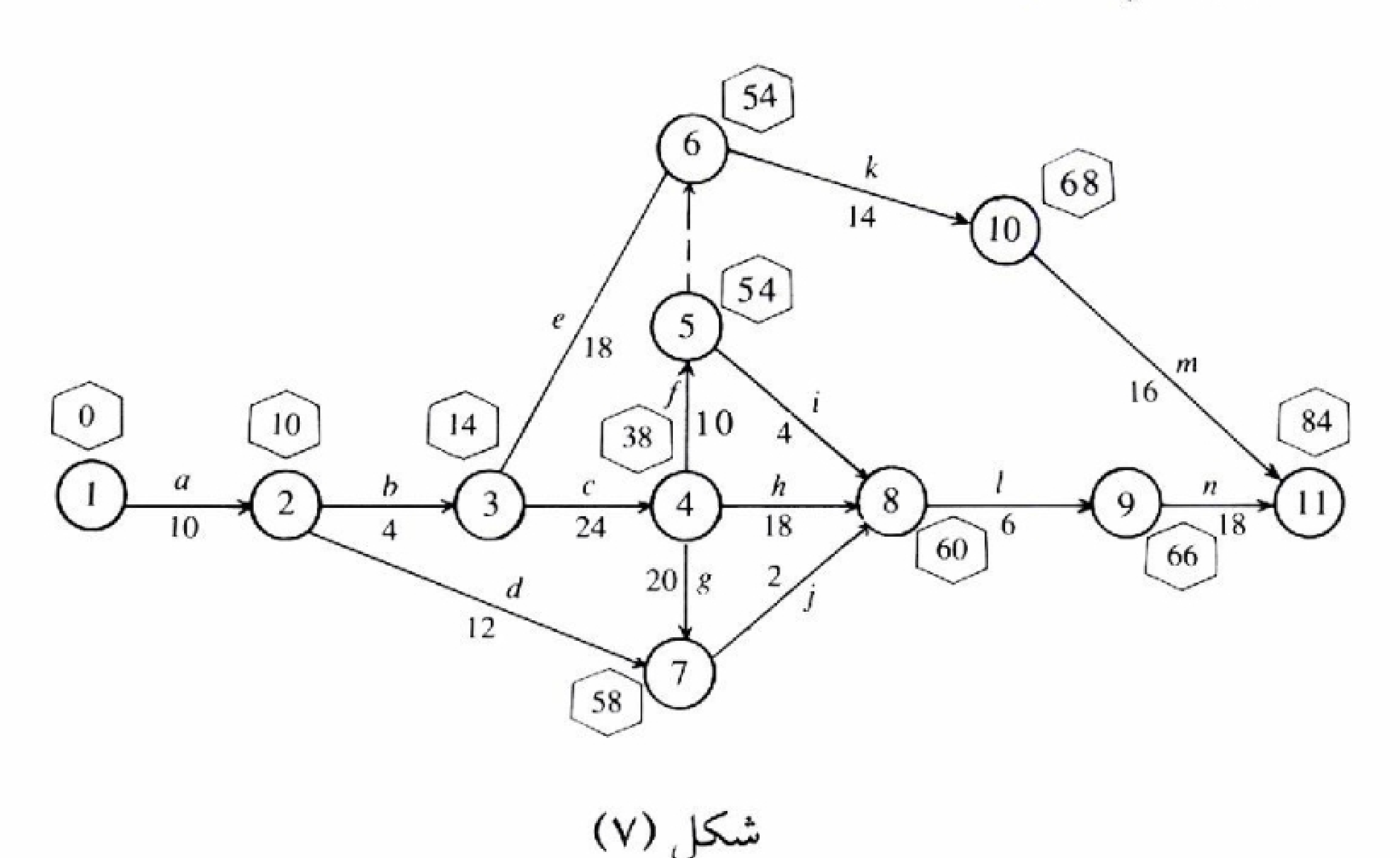
---

* عند حساب ES, LF للحدث في شبكةأعمال المشروع ، سنضع ES في مربع و LF في مسدس بجوار الحدث .

g, h, f . ولإيجاد LF للحدث 4، أي LF_4 ، نحسب أصغر فرق بين LF وفترة النشاط بين الحدث 4 والثلاثة أنشطة الخارجة منه أي نحسب :

$$\min\left[58-20,\ 60-18,\ 54-10\right]=38$$

كما هو مبين في شكل (٧).



شكل (٧)

ويعبر الفرق بين قيمة LF_i لحدث معين i وأقصر مدة لتنفيذ المشروع (أي ES = LF للحدث الأخير) عن أطول مسار ممكن من الحدث i حتى نهاية المشروع.
وبصفة عامة نحسب LF_i للحدث i من العلاقة :

$$LF_i=\min_j\left[LF_j-D_{ij}\right]$$

وذلك لجميع الأنشطة (i و j)
حيث تشير j إلى الأحداث التي تلي الحدث i والمرتبطة به بنشاط أو أنشطة تخرج منه.

الأوقات الفائضة للحدث والأوقات الفائضة للأنشطة:

يسمى الفرق بين الوقت المبكر للحدث ES_i والوقت المتأخر لهذا الحدث LF_i فائض الحدث، فبالنسبة للحدث 10 مثلاً، نجد أن $ES_{10} = 62$ و $LF_{10} = 68$ ، فيكون فائض هذا الحدث 6، والمثل يمكن حساب فائض كل حدث في شبكة المشروع.

وتساعد الأوقات الفائضة للأحداث في التعرف على المسار الحرج حيث تشير ES للحدث الأخير إلى طول المسار الحرج للمشروع، ويجب أن يكون الوقت الفائض لجميع الأحداث على المسار الحرج مساوياً لصفر.

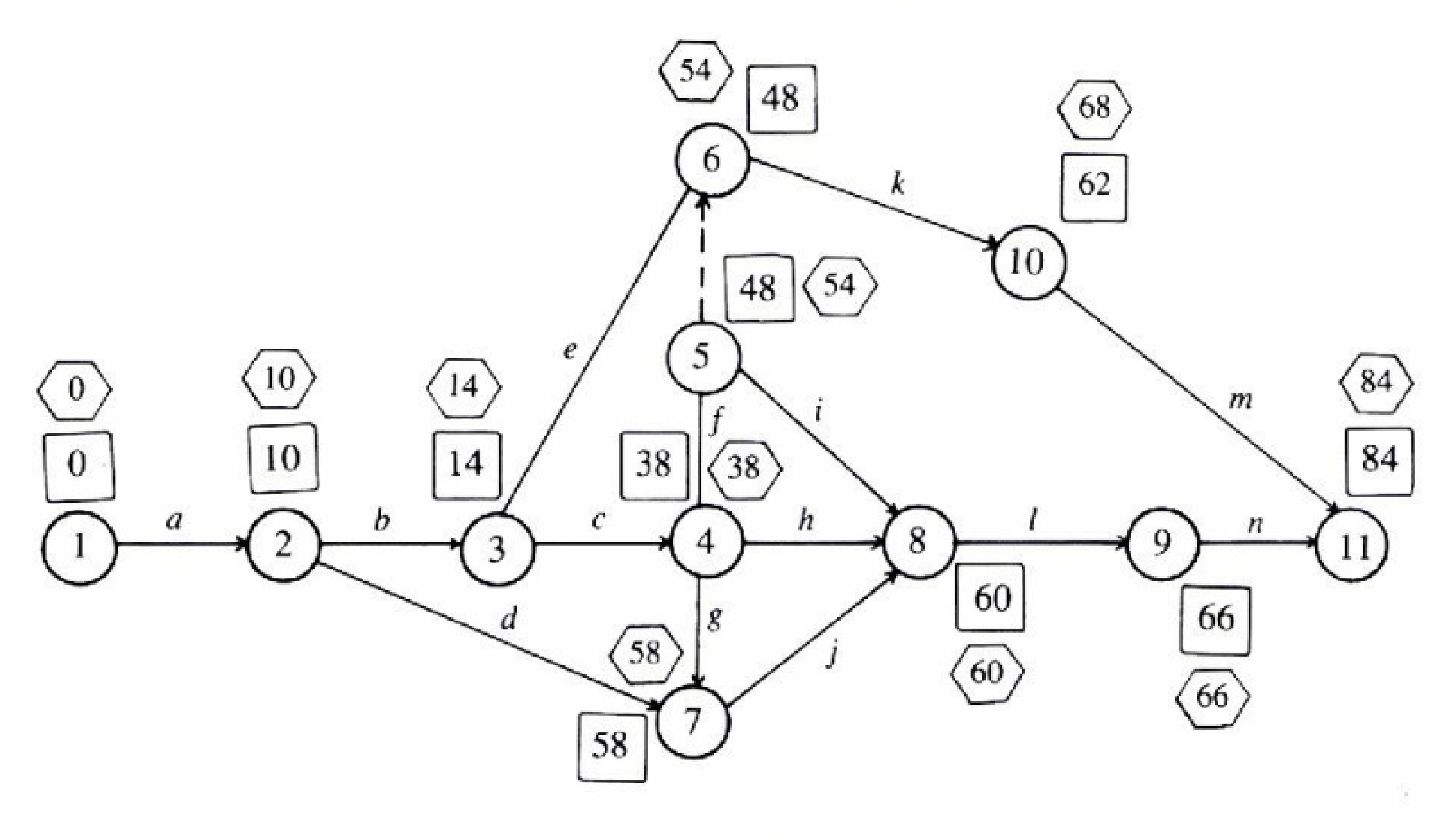
وعلى ذلك فسنهتم بالمسار الذي يمر بالأحداث التي يكون وقتها الفائض مساوياً للصفر، ويلاحظ في شكل (٨) أنه يوجد ثلاثة مسارات من هذا النوع، وهي:

1 2 7 8 9 11 و

1 2 3 4 7 8 9 11 و

1 2 3 4 8 9 11 و

ونأخذ المسار الذي له مدة المشروع، وهو المسار الذي يتحدد بالأحداث 1 2 3 4 7 8 9 11.



شكل (٨)

وبصفة عامة، يقع النشاط (i j) على المسار الحرج إذا توافرت فيه الشروط الثلاثة الآتية:

$$ES_i = LF_i$$ و

$$ES_j = LF_j$$ و

$$ES_j - ES_i = LF_j - LF_i = D_{ij}$$

حيث تشير D_{ij} إلى فترة تنفيذ النشاط (i j). وتشير هذه الشروط إلى عدم وجود وقت فائض بالنسبة للأنشطة الواقعة على المسار الحرج. وبتطبيق هذه القاعدة نجد أن النشاط (2 7) في المثال المدروس يتوافر فيه الشرطان الأول والثاني، ولكن لايتوافر فيه الشرط الثالث، وكذلك النشاط (4 8).

ويلاحظ أن التأخير في تنفيذ أي نشاط من الأنشطة الواقعة على المسار الحرج يؤدي إلى تأخير تنفيذ المشروع كله، ويجوز أن تتعدد المسارات الحرجة في ا لمشروع.

جدولة أوقات تنفيذ أنشطة المشروع

تمثل ES لحدث معين حداً أدنى لوقت بداية الأنشطة التالية للحدث، وتمثل LF لحدث معين حداً أقصى لوقت نهاية الأنشطة السابقة للحدث بدون أن يؤثر ذلك على وقت انتهاء المشروع، ويعرف الوقت المبكر لبداية النشاط بأنه الوقت المبكر لبداية الحدث السابق له، فالوقت المبكر لبداية النشاط (i j)، وسنشير له بالرمز ES_{ij} يكتب كالتالي:

$$ES_{ij} = ES_i$$

وبالمثل نجد أن الوقت المتأخر لنهاية النشاط هو الوقت المتأخر لنهاية الحدث اللاحق له، فالوقت المتأخر لنهاية النشاط(i j)، وسنشير له بالرمز LF_{ij} ، يكتب كالتالي:

$$LF_{ij} = LF_j$$

وسنعرف الآن نوعين من الوقت لنشاط معين (i j)، وهما الوقت المتأخر لبدء النشاط، وسنشير له بالرمز LS_{ij} ، والوقت المبكر لنهايته، وسنشير له بالرمز EF_{ij} ،

كالتالي :

$$LS_{ij} = LF_{ij} - D_{ij}$$ و
$$EF_{ij} = ES_{ij} + D_{ij}$$

وفائض النشاط float هو الفرق بين أكبر وقت متاح لتنفيذ النشاط وفترة تنفيذ النشاط ، فإذا أشرنا إلى هذا الوقت بالرمز F_{ij} ، فإن :

$$F_{ij} = LF_{ij} - ES_{ij} - D_{ij}$$
$$= LS_{ij} - ES_{ij}$$
$$= LF_{ij} - EF_{ij}$$

وقد تم حساب أوقات البداية وأوقات النهايةوالفائض لأنشطةالمشروع المدروس في جدول (٢) .

ويسمى هذا النوع من الفائض الفائض الإجمالي total float وسنشيرله بالرمز TF_{ij} ، ويتكون المسار الحرج من مجموعة الأنشطة التي يكون فائضها الإجمالي مساوياً للصفر ، وهي التي تعرف بالأنشطة الحرجة وهي الأنشطة a, b, c, g, j, l, n في المثال المدروس كما هو مبين بجدول (٢)، ويتكون المسار الحرج من هذه الأنشطة .

وهناك نوع آخر من الفائض يعرف بالفائض الحر free float وهو يعتمد على افتراض أن جميع الأنشطة تبدأ في أوقاتها المبكرة ، وبناء على ذلك فإن :

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}$$

وقد تم حساب الوقت الفائض الحر لكل نشاط في جدول (٢) .

ويلاحظ أن النشاط الحرج يجب أن يكون له فائض إجمالي مساوٍ للصفر . ويساوي الفائض الحر لنشاط معين صفراً إذا كان الفائض الإجمالي لهذا النشاط يساوي صفراً. ويمكن أن يكون للنشاط غير الحرج فائض حرّ يساوي صفر كما في النشاط f والنشاط k في المثال المدروس .

ويمكن استخدام فكرة الفائض في تعديل مواعيد بداية الأنشطة التي بها فائض دون أن يؤثر ذلك على موعد نهاية المشروع ، ويمكن تأخير بداية النشاط الذي به فائض حر دون أن تتأثر البداية المبكرة للأنشطة التالية . ومن ناحية أخرى ، يجب

الاهتمام بعدم تأخير تنفيذ الأنشطة التي يكون فائضها الإجمالي مساوياً للصفر (أي الأنشطة الحرجة) لأن أي تأخير في تنفيذها يترتب عليه تأخير تنفيذ المشروع.

وتستخدم جدولة أوقات تنفيذ أنشطة المشروع لمتابعة تطور تنفيذ أنشطته، وفي هذه الحالة، قد تختلف الأوقات الحقيقية لتنفيذ الأنشطة عن الأوقات المقدرة في شبكةأعمال المشروع، لذلك يجب مراجعة أوقات تنفيذ الأنشطة التالية من وقت لآخر عند توافر معلومات جديدة عن تغييرها. وتعديل أو تحديث أوقات تنفيذ المشروع هام خاصة في المشروعات التي يستغرق تنفيذها فترة طويلة وتكون عرضة لعوامل عدم التأكد.

جدول (٢)

رمز النشاط	الحدث			أوقات البداية		أوقات النهاية		الفائض		أنشطة المسار الحرج
	السابق	اللاحق	D_{ij}	ES_{ij}	LS_{ij}	EF_{ij}	LF_{ij}	الإجمالي	الحر	
i	i	j		$= ES_i$	$= LF_j - D_{ij}$	$= ES_i + D_{ij}$	$= LF_j$	TF_{ij}	FF_{ij}	
a	1	2	10	0	0	10	10	0	0	*
b	2	3	4	10	10	14	14	0	0	•
c	3	4	24	14	14	38	38	0	0	*
d	2	7	12	10	46	22	58	36	36	
e	3	6	18	14	36	32	54	22	16	
f	4	5	10	38	44	48	54	6	0	
g	4	7	20	38	38	58	58	0	0	*
h	4	8	18	38	42	56	60	4	4	
i	5	8	4	48	56	52	60	8	8	
j	7	8	2	58	58	60	60	0	0	*
k	6	10	14	48	54	62	68	6	0	
l	8	9	6	60	60	66	66	0	0	*
m	10	11	16	62	68	78	84	6	6	
n	9	11	18	66	66	84	84	0	0	*

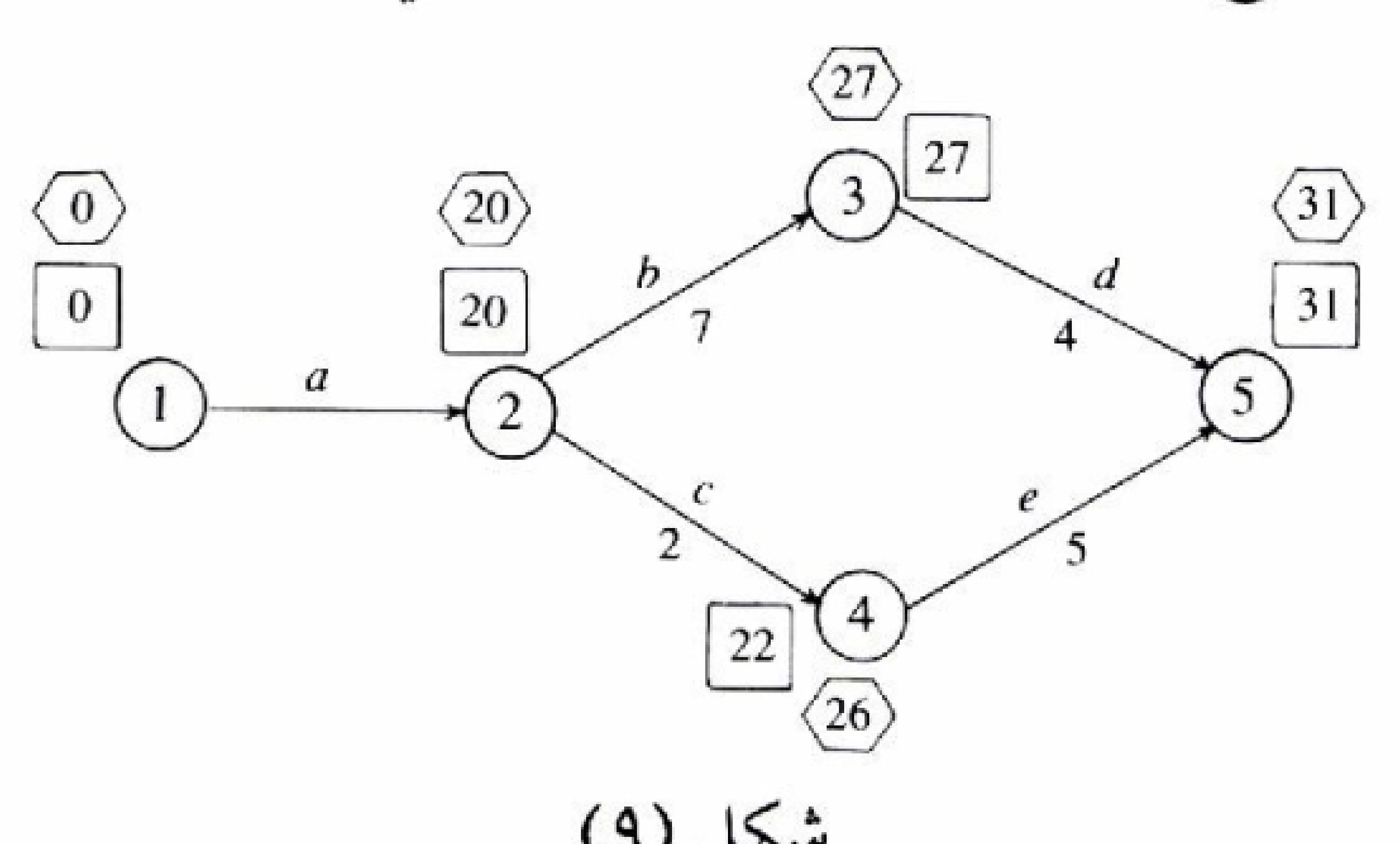
مثال٢ :

توافرت لدينا البيانات التالية (جدول ٣) عن أحد المشروعات:

جدول (٣)

النشاط	a	b	c	d	e
فترة تنفيذ النشاط (باليوم)	20	7	2	4	5
الأنشطة السابقة مباشرة	لايوجد	a	a	b	c

شبكة أعمال المشروع ومبين عليها ES, LF للأحداث هي :



شكل (٩)

نكون جدولاً لحساب LF و EF و LS و ES لأنشطة المشروع كالتالي :

جدول (٤)

رمز النشاط	رقم النشاط i	j	فترة تنفيذ النشاط D_{ij}	أوقات البداية ES	LS	أوقات النهاية EF	LF	الفائض الإجمالى	أنشطة المسار الحرج
a	1	2	20	0	0	20	20	0	*
b	2	3	7	20	20	27	27	0	*
c	2	4	2	20	24	22	26	4	
d	3	5	4	27	27	31	31	0	*
e	4	5	5	22	26	27	31	4	

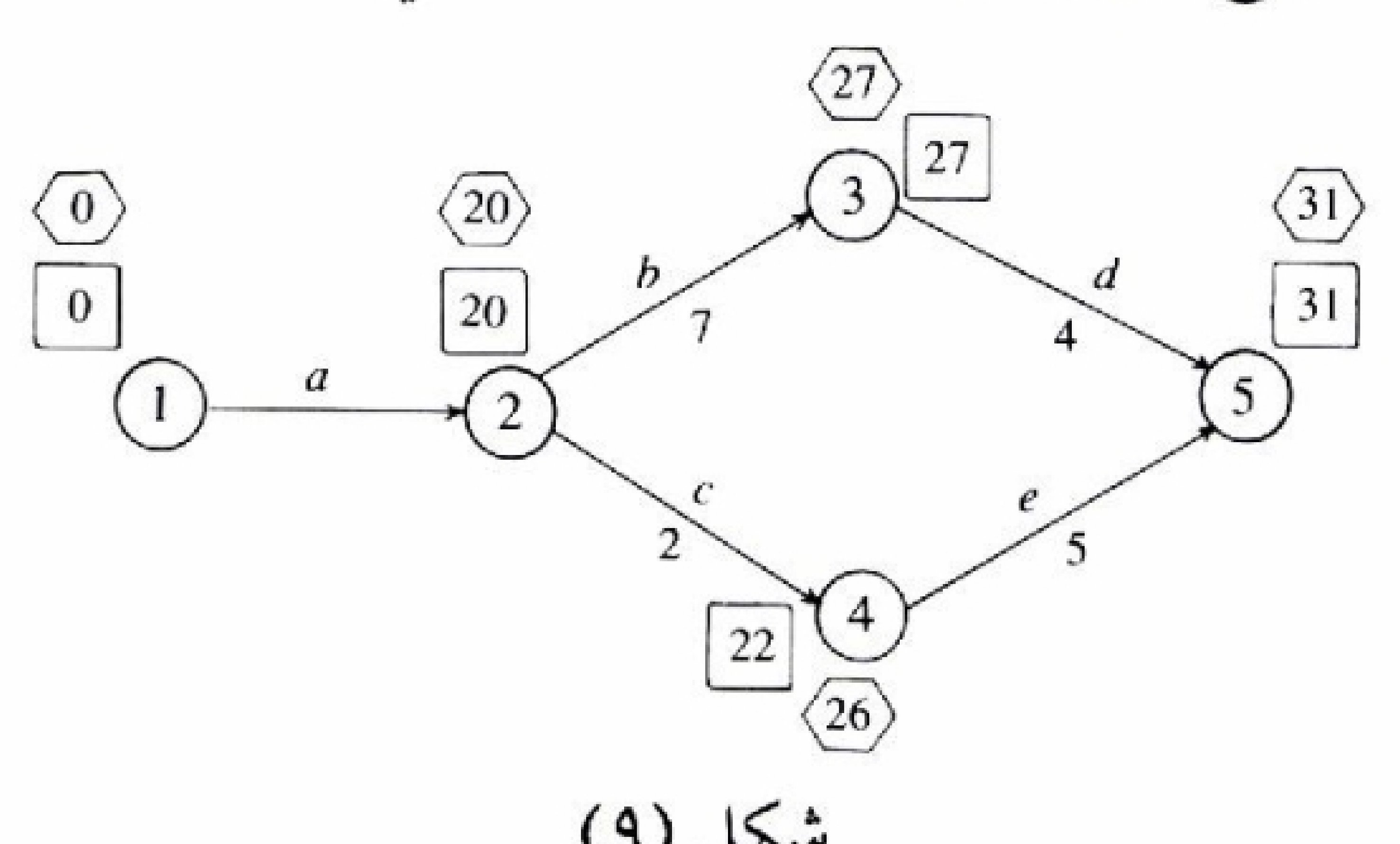
مثال٢ :

توافرت لدينا البيانات التالية (جدول ٣) عن أحد المشروعات:

جدول (٣)

النشاط	a	b	c	d	e
فترة تنفيذ النشاط (باليوم)	20	7	2	4	5
الأنشطة السابقة مباشرة	لايوجد	a	a	b	c

شبكة أعمال المشروع ومبين عليها ES, LF للأحداث هي :



شكل (٩)

نكون جدولاً لحساب LF و EF و LS و ES لأنشطة المشروع كالتالي :

جدول (٤)

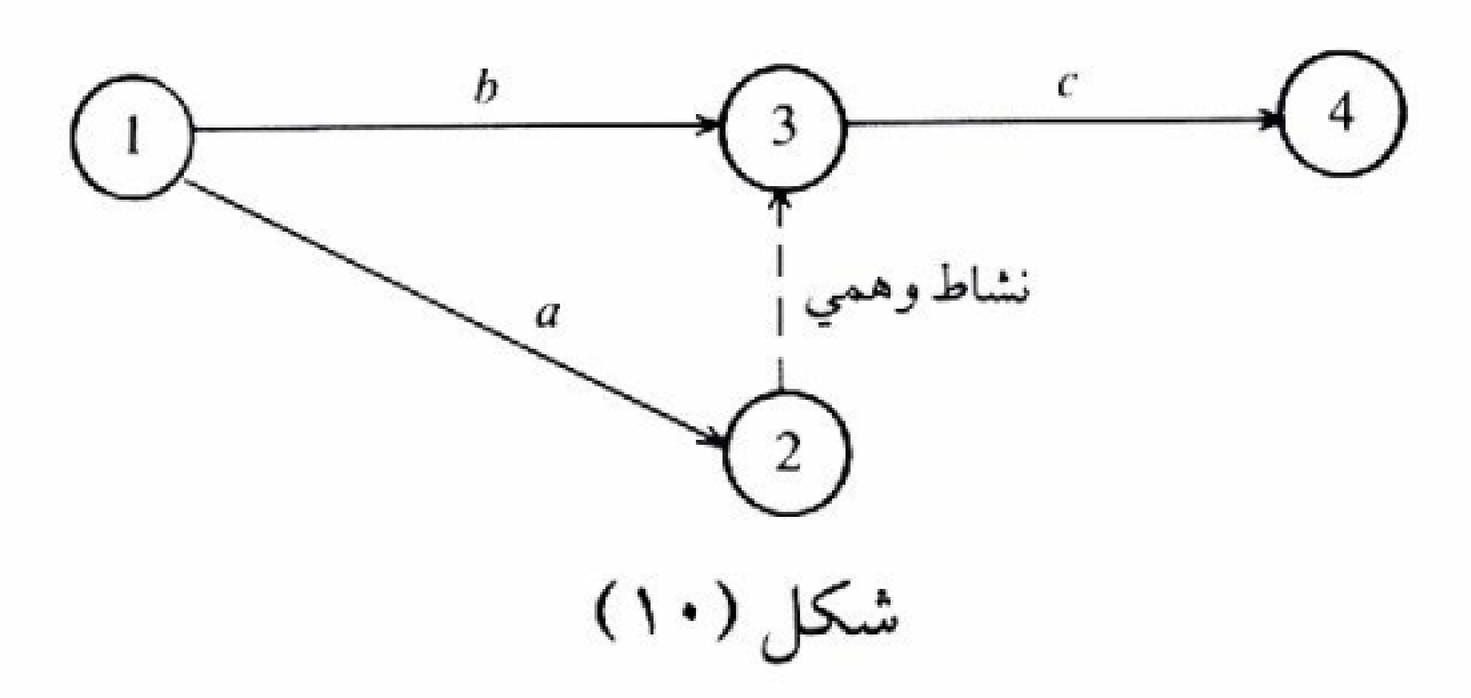
رمز النشاط	رقم النشاط i	رقم النشاط j	فترة تنفيذ النشاط D_{ij}	أوقات البداية ES	أوقات البداية LS	أوقات النهاية EF	أوقات النهاية LF	الفائض الإجمالي	أنشطة المسار الحرج
a	1	2	20	0	0	20	20	0	*
b	2	3	7	20	20	27	27	0	*
c	2	4	2	20	24	22	26	4	
d	3	5	4	27	27	31	31	0	*
e	4	5	5	22	26	27	31	4	

المسار الحرج هو الذي يتكون من الأنشطةالحرجة وهي الأنشطة التي يكون فائضها الإجمالي مساوياً للصفر، وهي a, b, d، ووقت تنفيذ المشروع هو وقت تنفيذ المسار الحرج وهو 31 يوماً.

مثال ٣:

كون شبكة أعمال المشروع الذي يتكون من الأنشطة a, b, c بحيث إن النشاطين a, b هما أول نشاطين في المشروع ويمكن أن يبدآ معاً وأن النشاط c يمكن أن يبدأ فقط بعد الانتهاء من تنفيذ النشاطين a, b، والنشاط c هو آخر نشاط في المشروع.

يمكن تكوين شبكة أعمال المشروع طبقاً للمواصفات السابقة كالتالي:

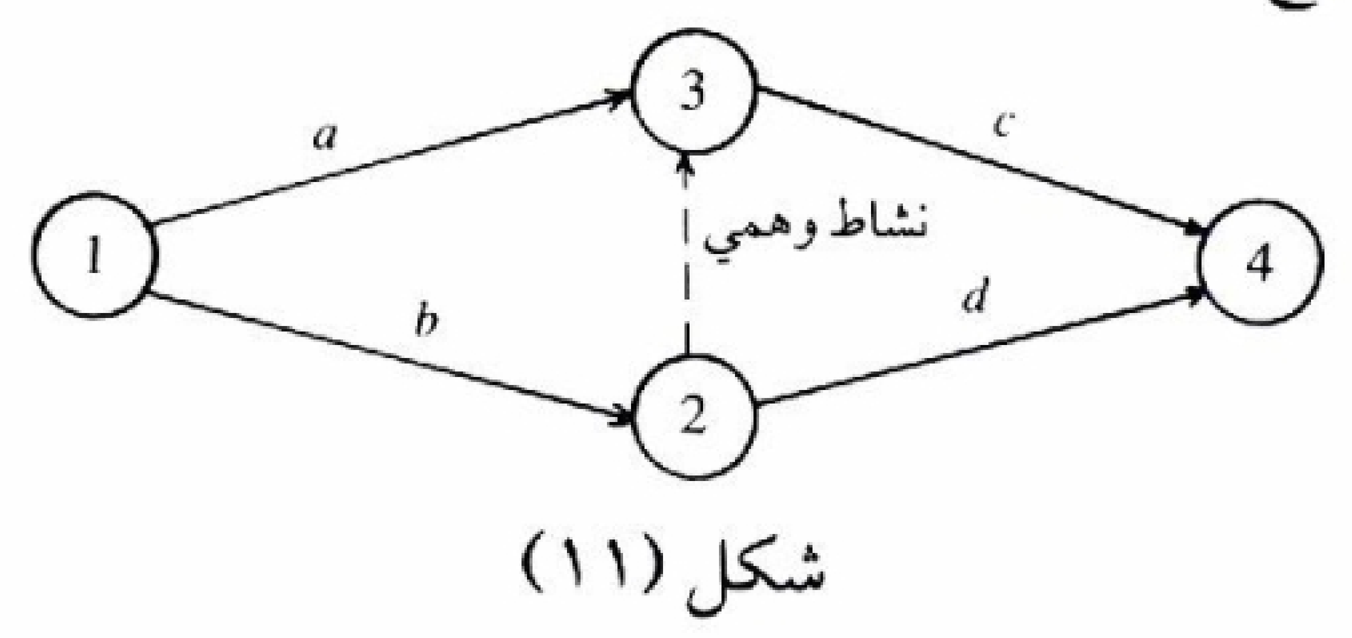


شكل (١٠)

ويلاحظ أن النشاط (3 2) نشاط وهمي.

مثال ٤:

كون شبكة أعمال المشروع الذي يتكون من الأنشطة a, b, c, d، بحيث إن a, b يمكن أن يبدآ معاً في الوقت نفسه وإن النشاط c لايمكن أن يبدأ إلا بعد تنفيذ كل من a,b وأن النشاط d يمكن أن يبدأ بعد الانتهاء من تنفيذ النشاط b، والنشاطين c, d هما آخر نشاطين في المشروع.



شكل (١١)

يمكن تمثيل شبكة أعمال المشروع طبقاً للمواصفات السابقة كالتالي :

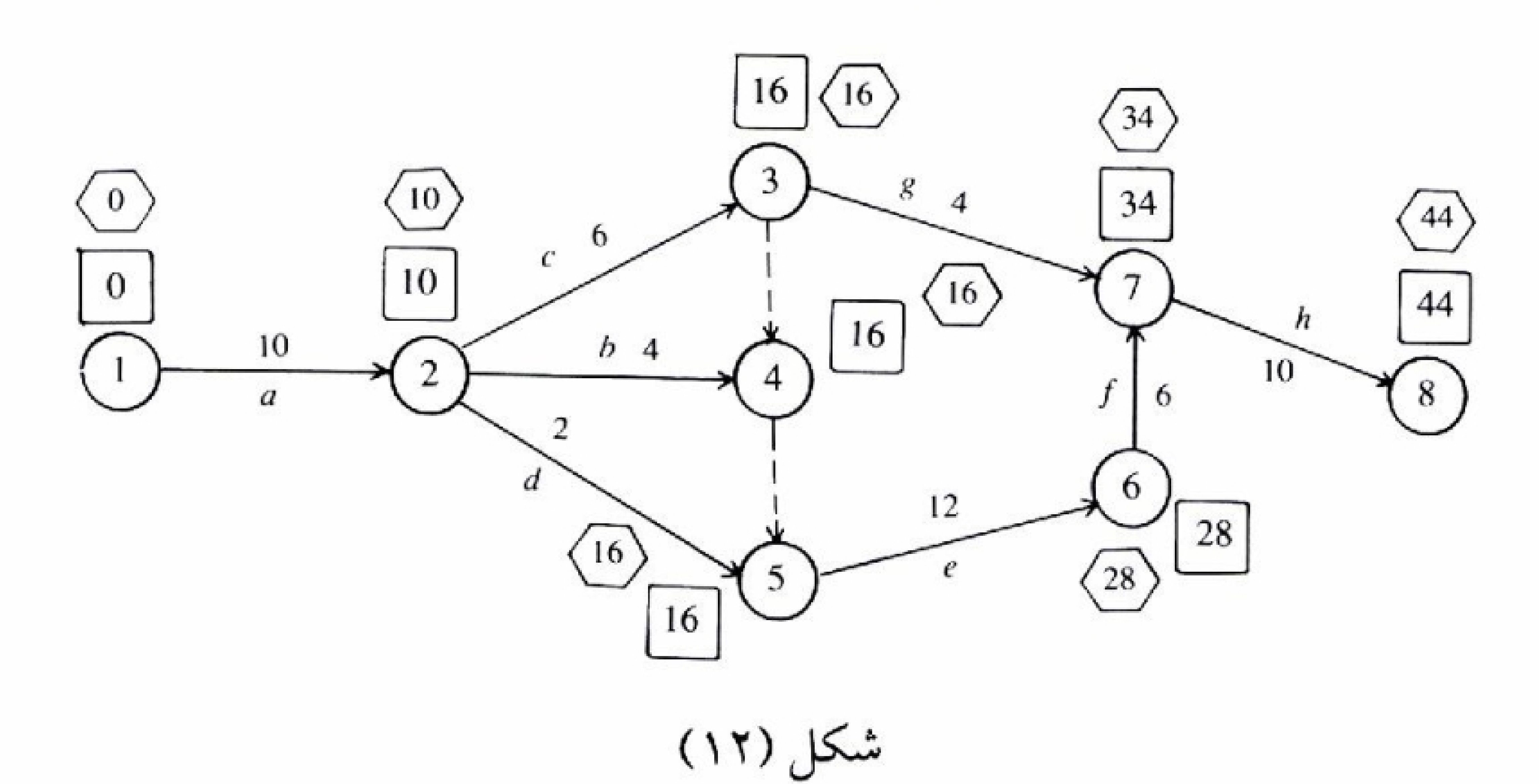
مثال ٥ :

فيما يلي بيانات خاصة بمشروع معين :

جدول (٥)

الأنشطة السابقة مباشرة	فترة تنفيذ النشاط باليوم	رمز النشاط
لايوجد	10	a
a	4	b
a	6	c
a	2	d
b, c, d	12	e
e	6	f
c	4	g
f, g	10	h

والمطلوب إيجاد LF وEF وLS و ES لكل نشاط في المشروع .
نكون شبكة أعمال المشروع طبقاً للبيانات السابقة كالتالي :



شكل (١٢)

من ذلك نكون الجدول الآتي لحساب LF وEF وLS و ES لكل نشاط :

جدول (٦)

أنشطة المسار الحرج	الفائض الكلي	أوقات النهاية		أوقات البداية		فترة تنفيذ النشاط	رقم النشاط		رمز النشاط
		LF	EF	LS	ES	D_{ij}	j	i	
*	0	10	10	0	0	10	2	1	a
	2	16	14	12	10	4	4	2	b
*	0	16	16	10	10	6	3	2	c
	4	16	12	14	10	2	5	2	d
*	0	28	28	16	16	12	6	5	e
*	0	34	34	28	28	6	7	6	f
	14	34	20	30	16	4	7	3	g
*	0	44	44	34	34	10	8	7	h

من الجدول السابق، نجد أن المسار الحرج هو a c e f h وأن فترة تنفيذه تساوي 44 يوماً وهي فترة تنفيذ المشروع.

الفصل السابع

استخدام الأوقات المقدرة لتنفيذ أنشطة المشروع في أسلوب تقويم البرامج ومراجعتها

افترضنا في الفصل السابق أن فترة تنفيذ كل نشاط محددة ويفيد ذلك في شرح المفاهيم الأساسيةالتي يعتمد عليها تحليل شبكة أعمال المشروع، وعند إدخال العنصر الاحتمالي في تقدير الوقت نفرض أن فترة تنفيذ كل نشاط هي متغير عشوائي* له التوقع t_e والتباين v كالتالي:

$$(1) \quad t_e = \frac{O + 4M + P}{6}.$$

$$(2) \quad v = \left(\frac{P - O}{6}\right)^2$$

---

* التحليل الإحصائي لهذا المتغيير يعتمد على افتراض أنه يتبع توزيع بيتاً لما يتميز به من خصائص تناسب الفروض الواقعية لهذا النوع من المشاكل.
لمزيد من التفاصيل انظر على سبيل المثال:

H. Taha (1976). *Operations Research.* New York: Macmillan Pub. Co. Inc., pp. 372 - 375; and R. I. .Levin & C.A. Kirkpatrick (1966). *Planning and Control with PERT/CPM.* New York: McGraw Hill Book Co., pp. 93 - 111 .

حيث :

O هي التقدير المتفائل Optimistic estimate وهو الذي يمثل الحد الأدنى من الوقت الذي يستغرقه النشاط

P ، هي التقدير المتشائم Pessimistic estimate وهو الذي يمثل الحد الأقصى من الوقت الذي يستغرقه النشاط

M ، هي التقدير الأكثر احتمالاً most likely estimate ، هو الوقت الذي يتوقع أكثر الخبراء أن النشاط يمكن أن ينفذ فيه وهو يقابل قيمة المنوال modal value .

ويلاحظ من المعادلة (١) أن كلا من التقدير المتفائل والتقدير المتشائم للوقت له وزن ترجيحي واحد، بينما أن التقدير الأكثر احتمالاً للوقت له وزن ترجيحي 4، فيكون مجموع الأوزان الترجيحية6 فتقسم على 6 للحصول على متوسط مرجح weighted average .

فإذا افترضنا على سبيل المثال أننا قدرنا الأوقات الثلاثة لتنفيذ نشاط معين باليوم كالتالي : M = 6 و P = 12 و O = 4

فإن متوسط وقت تنفيذ النشاط باليوم هو : [4+4(6)+12]/6=6.7

وتباين وقت تنفيذ النشاط هو :

$$\left(\frac{12-4}{6}\right)^2 = 1.78$$

والانحراف المعياري لوقت تنفيذ النشاط باليوم هو 1.3 .

تقدير احتمال تنفيذ المشروع فى فترة معينة

لتقدير احتمال تنفيذ المشروع في فترة معينة سنفترض أن فترات تنفيذ الأنشطة مستقلة وبالتالي فإن مجموع فترات تنفيذ الأنشطة على المسار الحرج (وهي تساوي فترة تنفيذ المشروع) يقترب توزيعه من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي مجموع الفترات المتوقعة لتنفيذ الأنشطة على المسار الحرج، وتباين يساوي مجموع تباينات هذه الفترات .

ويعتمد ذلك على نظرية النزعة المركزية Central Limit Theorem التي تشير إلى أن مجموع متغيرات عشوائية مستقلة تنتمي إلى توزيعات ذات أوساط حسابية وتباينات محددة، هذا المجموع يقترب توزيعه من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي مجموع الأوساط الحسابية لهذا التوزيعات، وتباين يساوي مجموع تبايناتها.

ويمكن الاستفادة من ذلك في تقدير احتمال تنفيذ المشروع في فترة معينة أو في تقدير فترة تنفيذ المشروع المقابلة لاحتمال معين.

مثال ١ :

سنستعين بمثال ١ في الفصل السابق ونختار الأوقات الثلاثة : O, M, P بحيث تعطي قيماً لـ t_e تساوي تقديرات فترة تنفيذ كل نشاط كما في المثال، وستكون الأنشطة الحرجة بالتالي كما هي ونحسب تباين كل نشاط كما في جدول (١).

جدول (١)

النشاط	الوقت المتوقع لتنفيذ النشاط باليوم			$t_e = \frac{O+4M+P}{6}$	$\sigma^2 = \left(\frac{P-O}{6}\right)^2$	انشطة المسار الحرج
	O	M	P			
a	6	10	14	10	1.8	*
b	2	3	10	4	1.8	*
c	16	20	24	24	1.8	*
d	8	10	24	12	7.1	
e	12	16	32	18	11.1	
f	7	10	13	10	1	
g	14	20	26	20	4	
h	10	19	22	18	4	*
i	2	4	6	4	.4	
j	2	2	2	2	0	*
k	12	13	20	14	1.7	
l	3	6	9	6	1	*
m	10	15	26	16	7.1	
n	14	18	22	18	1.7	*

تساوي القيمة المتوقعة لفترة تنفيذ المسار الحرج (وسنشير لها بالرمز μ) مجموع القيم المتوقعة لفترات تنفيذ الأنشطة التي تقع على المسار الحرج، وهي الأنشطة a, b, c, g, j, l, n أي إن :

$$\cdot\ \mu = 10 + 4 + 24 + 20 + 2 + 6 + 18 = 84$$

وتباين فترةتنفيذ المسار الحرج وسنشير له بالرمز σ_T^2 ، هو مجموع تباين فترات تنفيذ الأنشطة على هذا المسار أي إن :

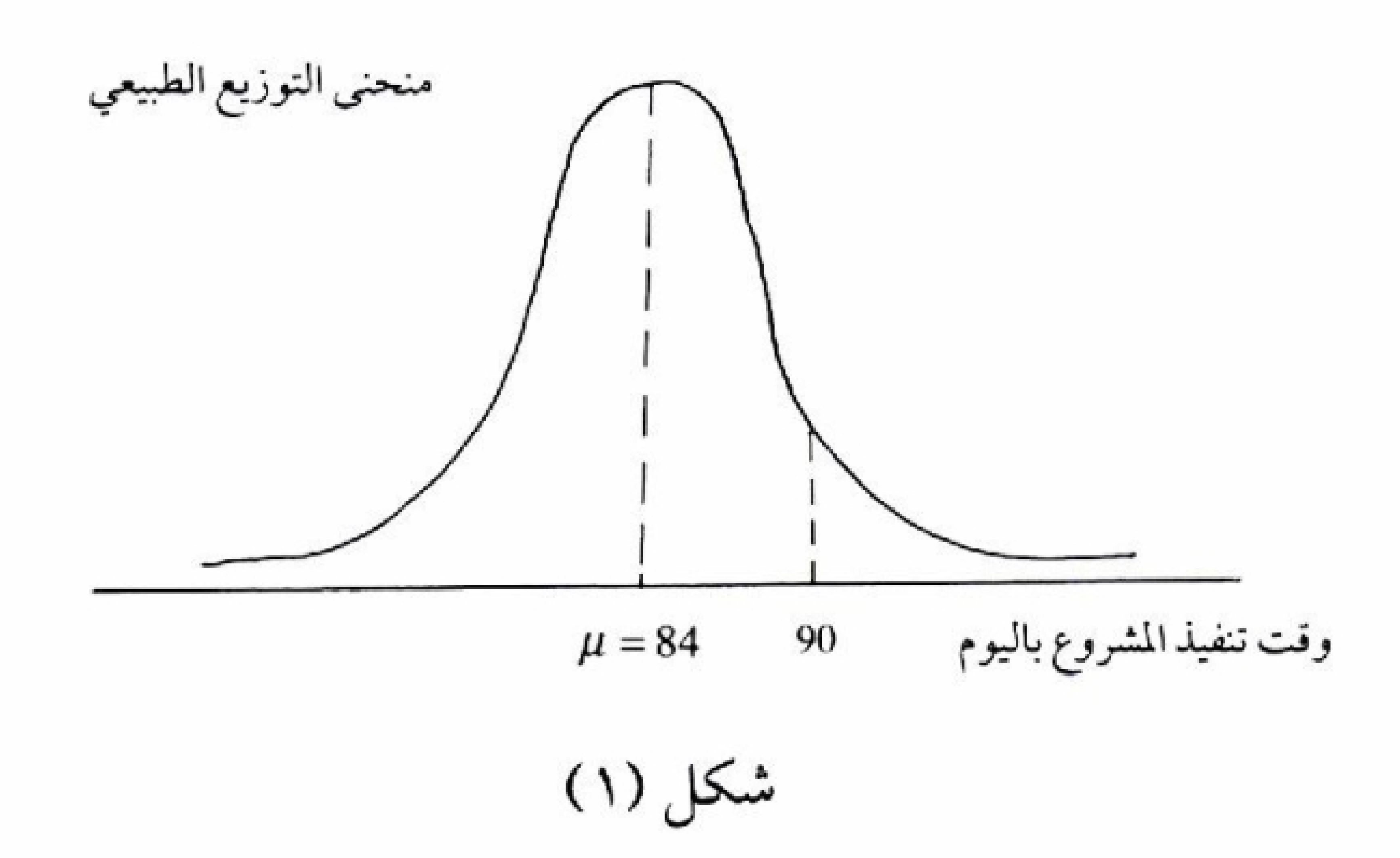
$$\sigma_T^2 = 1.8 + 1.8 + 1.8 + 4 + 0 + 1 + 1.7 = 12.1$$
$$\therefore\ \sigma_T = 3.5$$

ولتمثيل احتمال تنفيذ المشروع في90 يوماً أو أقل مثلا نحسب :

$$Z = \frac{T - \mu}{\sigma_T} = \frac{90 - 84}{3.5} = 1.71$$

حيث تشير T إلى فترة تنفيذ المسار الحرج، وتشير Z إلى عدد الانحرافات المعيارية بين T و μ .

ومن جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي نجد أن الاحتمال المطلوب يساوي 0.9564 كما هو مبين في شكل (١).



شكل (١)

ويمكن أيضاً تقدير فترة تنفيذ المشروع التي تقابل احتمالاً معيناً؛ فعلى سبيل المثال لتقدير الفترة التي يمكن أن ينفذ فيها المشروع باحتمال 90% نجدأن قيمة Z المقابلة هي 1.28، وذلك من جدول مساحات التوزيع الطبيعي ونحصل على :

$$1.28 = \frac{T - 84}{3.5}$$

ومنها نجد أن :

$$T = 84 + 1.28\ (3.5) = 88.48$$

ويعني ذلك أن فرصة تنفيذ المشروع في 88.48 يوماً أو أقل هي تسعون بالمائة .

مثال ٢ :

سنفترض أن لدينا البيانات التالية عن مشروع معين :

جدول (٢)

رمز النشاط	الأنشطة السابقة مباشرة	الأوقات المتوقعة لتنفيذ أنشطة المشروع (باليوم)		
		المتفائل O	الأكثر احتمالا M	المتشائم P
a	لايوجد	4	6	12
b	a	2	2	2
c	a	8	16	18
d	a	6	8	10
e	b	4	6	20
f	c	12	14	18
g	d, e, f	10	14	20

نحسب الوسط الحسابي لفترة تنفيذ كل نشاط t_e وتباين هذه الفترة V حيث إن :

$$t_e = \frac{O + 4M + P}{6}$$

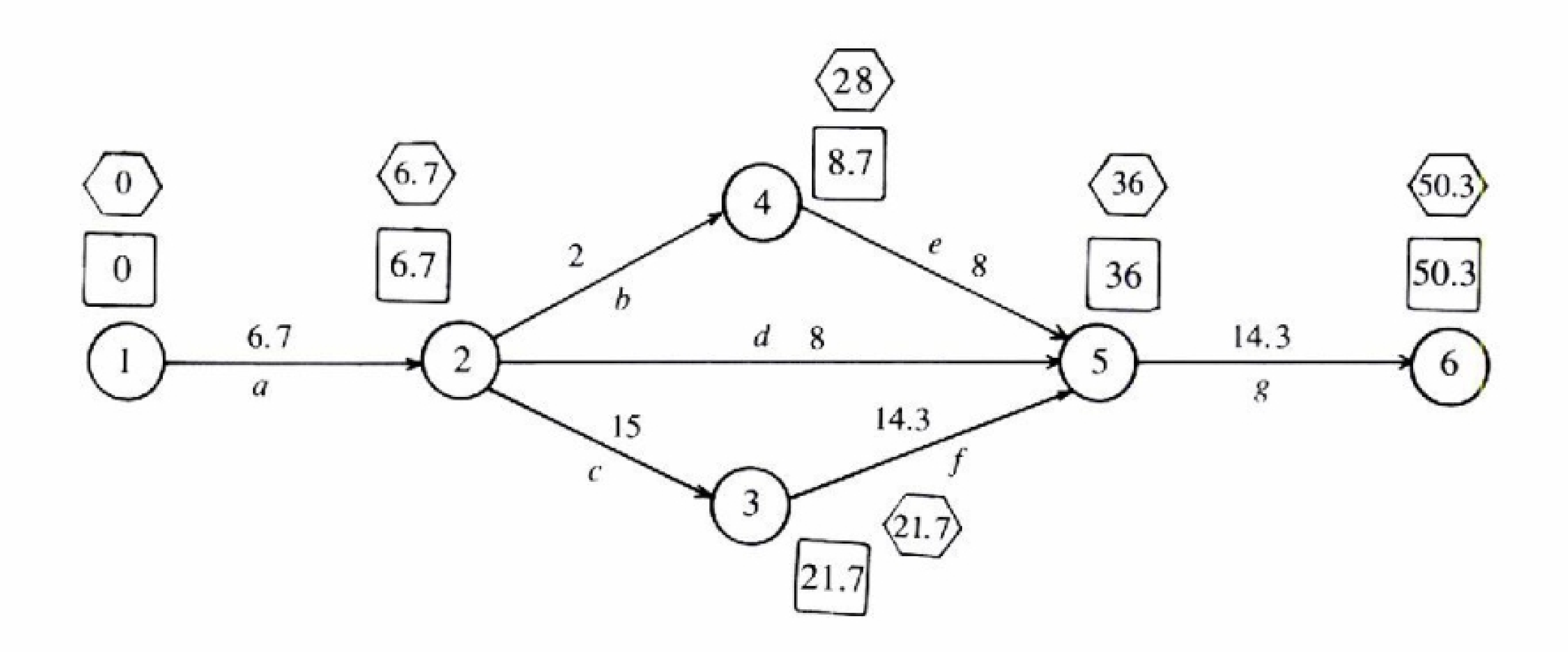
$$V = \left(\frac{P - O}{6}\right)^2$$

كما هو مبين بالجدول الآتي :

جدول (٣)

رمز النشاط	a	b	c	d	e	f	g
الوسط الحسابي t_e (باليوم)	6.7	2	15	8	8	14.3	14.3
التباين V	1.78	0	2.78	.44	7.11	1	2.78

نكون شبكة أعمال المشروع ونحدد عليها LF و ES لكل حدث طبقاً لمتوسط فترة تنفيذ كل نشاط كالتالي :



شكل (٢)

من ذلك نكون جدول لحساب LF وEF وLS وES لكل نشاط كالتالي :

جدول (٤)

أنشطة المسار الحرج	الفائض الكلي	أوقات النهاية		أوقات البداية		فترة تنفيذ النشاط	رقم النشاط		رمز النشاط
		LF	EF	LS	ES	D_{ij}	j	i	
*	0	6.7	6.7	0	0	6.7	2	1	a
	19.3	28	8.7	26	6.7	2	4	2	b
*	0	21.7	21.7	6.7	6.7	15	3	2	c
	21.3	36	14.7	28	6.7	8	5	2	d
	19.3	36	16.7	28	8 .7	8	5	4	e
*	0	36	36	21.7	21.7	14.3	5	3	f
*	0	50.3	50.3	36	36	14.3	6	5	g

من الجدول السابق، نجد أن المسار الحرج هو a c f g، وأن متوسط فترة تنفيذ المشروع هو 50.3 يوم.

وكما في المثال السابق نجد أن تباين فترة تنفيذ المشروع هو مجموع تباينات فترة تنفيذ الأنشطة الحرجة وهي تساوي :

$$1.78 + 2.78 + 1 + 2.78 = 8.34$$

والانحراف المعياري لفترة تنفيذ المشروع يساوي 2.8879 . ولإيجاد احتمال أن يتم تنفيذ المشروع في 54 يوماً مثلا أو أقل نحسب عدد الانحرافات المعيارية على يمين الوسط الحسابي في التوزيع الاحتمالي الطبيعي كالتالي :

$$\frac{54 - 50.3}{2.8879} = 1.2812$$

ومن جدول مساحات التوزيع الطبيعي، نجد أن الاحتمال المطلوب هو 0.8997، وتعني هذه النتيجة أن هناك فرصة تسعين بالمائة تقريباً لأن يتم تنفيذ المشروع في 54 يوماً أو أقل .

ولتقدير الفترة التي يمكن أن ينفذ فيها المشروع باحتمال 95% مثلا نجد أن قيمة Z المقابلة هي 1.64 وذلك من جدول مساحات التوزيع الطبيعي، ونحصل على :

$$1.64 = \frac{T - 50.3}{2.8879}$$

$$\therefore \quad T = (2.8879)(1.64) + 50.3 = 55.04$$

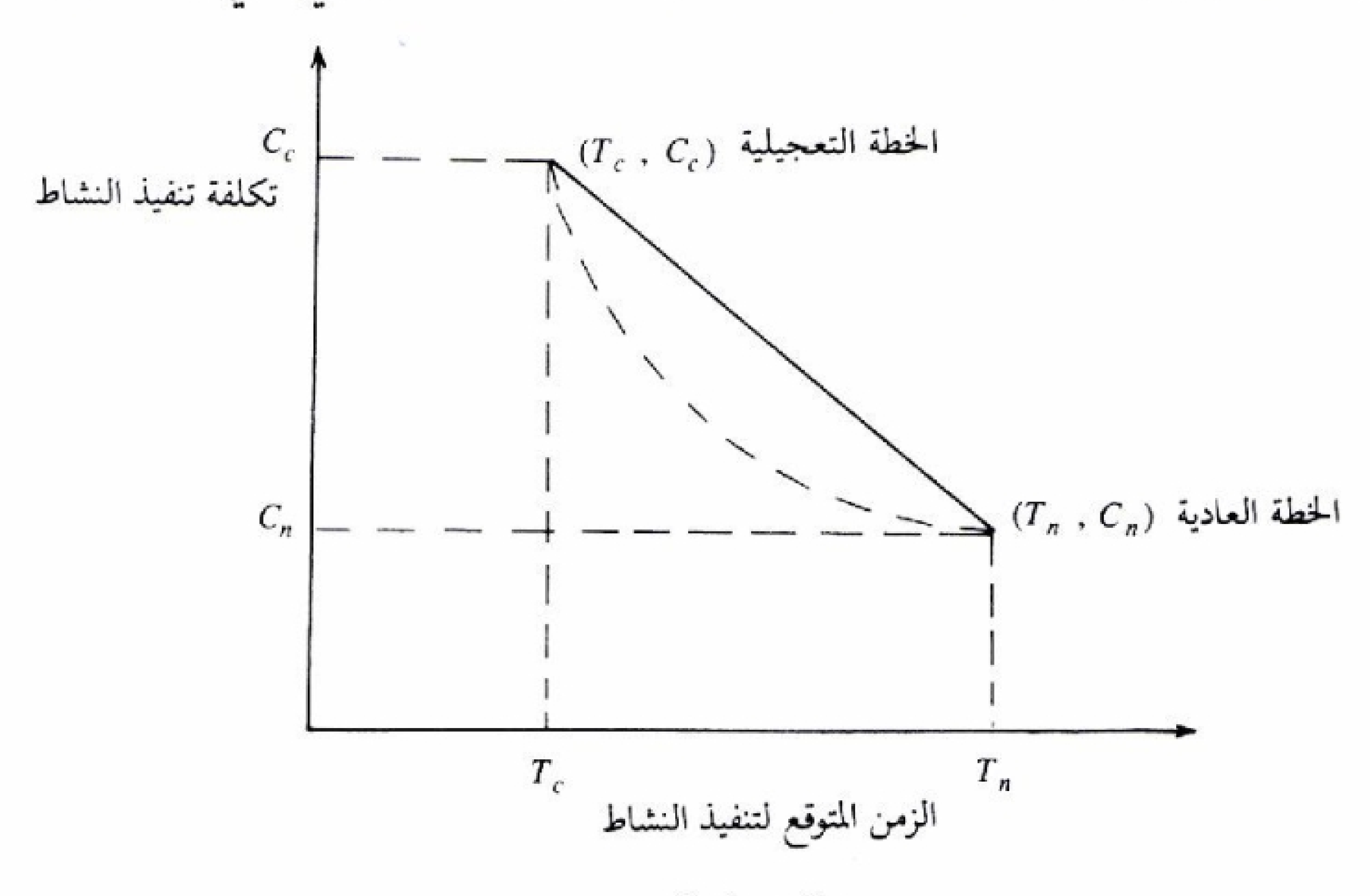
ويعني ذلك أن المشروع يمكن أن يتم تنفيذه في 55 يوماً تقريباً أو أقل باحتمال 95%.

الفصل الثامن

استخدام التحليل الشبكى فى اختصار أزمنة التنفيذ مع أقل تكلفة ممكنة

ترتبط الأزمنة المقدرة لتنفيذ أنشطة المشروع بمستوى معين من الموارد المخصصة لتنفيذها، ويمكن لمتخذ القرار زيادة الموارد المخصصة لتنفيذ بعض الأنشطة للإسراع في تنفيذها بهدف تخفيض الزمن اللازم لتنفيذ المشروع، وذلك بزيادة العمالة أو باستخدام آلات ذات كفاءة أكبر . . . الخ.

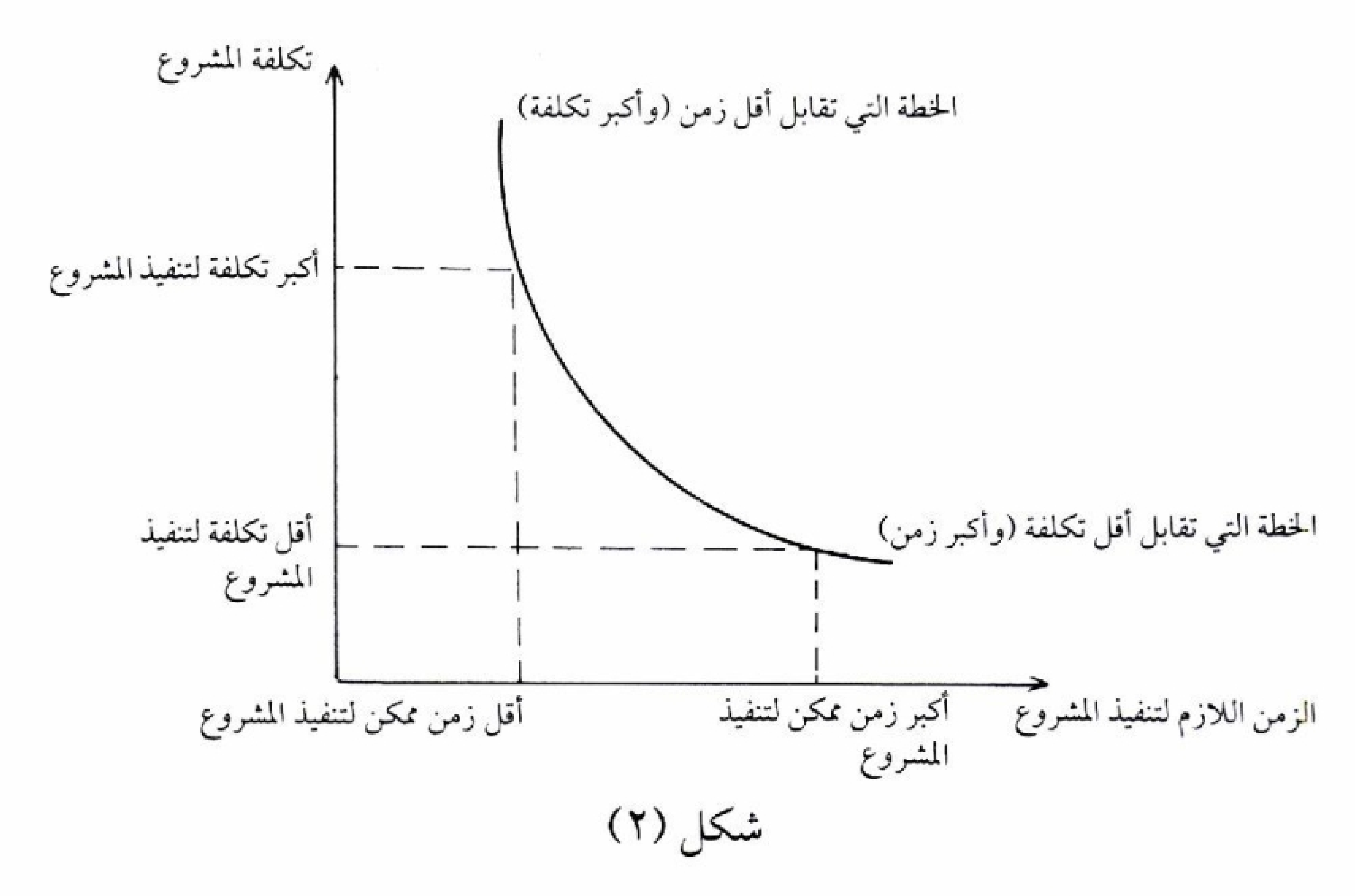
ويمكن تصوير العلاقة بين زمن تنفيذ نشاط معين وتكلفة تنفيذه بواسطة شكل (١)، حيث نجد نوعين من الخطط : الخطة العادية normal plan، وهي التي ينفذ فيها



شكل (١)

النشاط في الزمن العادي normal time T_n وبالتكلفةالعادية normal cost C_n، والخطة التعجيلية crash plan، وهي التي ينفذ فيها النشاط في الزمن التعجيلي crash time T_c بالتكلفةالتعجيلية crash cost T_c. ونفترض في هذه الحالة أن تكلفة تنفيذ النشاط دالة خطية في الزمن المتوقع لتنفيذه، ويلاحظ أنه في بعض الحالات تكون العلاقة بين تكلفة النشاط وزمن تنفيذه غير خطية، وتستخدم العلاقة الخطية كتقريب لها، ويمكن اختيار الخطة العادية أو الخطة التعجيلية أو أي خطة مناسبة بينهما طبقا للزمن المناسب والتكلفة المتاحة لتنفيذ النشاط.

وعلى مستوى المشروع، يمكن تمثيل العلاقة بين تكلفة تنفيذ أنشطته والزمن اللازم لتنفيذه بواسطة مايعرف بمنحنى الزمن ـ التكلفة للمشروعtime - cost trade off curve، كما في الشكل (٢) وتقابل كل خطة ممكنة للمشروع نقطة معينة على هذا المنحنى، ويساعد منحنى الزمن ـ التكلفة للمشروع متخذ القرار على اختيار خطة معينة طبقا للزمن المناسب والتكلفة المخصصة لتنفيذ المشروع.



شكل (٢)

وسنبين بالاستعانة بالمثال الآتي كيفية تقدير زمن تنفيذ المشروع والتكلفة المقابلة وذلك للخطط الممكنة.

مثال ١ :

نفترض في مثال ١ في الفصل السادس أن الزمن المتوقع لتنفيذ أنشطة المشروع و التكلفة المتوقعة المقابلة في الخطة العادية وفي الخطة التعجيلية كما هو مبين في جدول (١)، حيث نفترض أن الزمن المتوقع لتفيذ النشاط a هو عشرة أيام بتكلفة قدرها 3000 وحدة نقدية في الخطة العادية، ويمكن في الخطة التعجيلية تخفيض زمن تنفيذه بيومين بتكلفة كلية قدرها 3900، أي أن التكلفة الإضافية لتخفيض زمن هذا النشاط 450 وحدة نقدية في اليوم. ونفترض أن النشاط b لايمكن تخفيض زمن

جدول (١)

رمز النشاط	الزمن المتوقع لتنفيذ أنشطة المشروع		تكلفة تنفيذ أنشطة المشروع		التكلفة الإضافية مقابل تخفيض زمن تنفيذ النشاط بيوم واحد
	في الخطة العادية T_n	في الخطة التعجيلية T_r	في الخطة العادية C_n	في الخطة التعجلية C_r	
a	10	8	3000	3900	450
b	4	4	1500	1500	—
c	24	16	7200	8400	150
d	12	8	2700	3900	300
e	18	14	5400	6350	237.5
f	10	6	3000	4200	300
g	20	14	4500	6300	300
h	18	12	5400	6750	225
i	4	4	1200	1200	—
j	2	2	150	150	—
k	14	10	3600	4950	337.5
l	6	4	900	1215	157.5
m	16	8	6000	6300	37.5
n	18	16	4500	5175	337.5
			49050	60290	

تنفيذه، وهكذا بالنسبة لباقي أنشطة المشروع المبينة في جدول (١)، ونجد أن التكلفة الإجمالية لتنفيذ الأنشطة في خططها العادية هي 49050 وحدة نقدية.

الخطة الأولى هي الخطة المقابلة للتكلفةالعادية للأنشطة، والمسار الحرج لهذه الخطة هو a b c g j l n، وأي تخفيض في زمن تنفيذ نشاط يقع على المسار الحرج سيؤدي إلى تخفيض فترة تنفيذ المشروع بنفس المقدار، وذلك طالما أن تخفيض فترة تنفيذ هذا النشاط لايؤثر على المسار الحرج للمشروع.

وتتضمن الخطة الثانية الإسراع بتنفيذ النشاط الحرج الأقل زيادة في التكلفة، وهو النشاط c، حيث إنه يزيد التكاليف بأقل مقدار وهو 150 وحدة نقدية عن كل يوم يوفره النشاط. والفترة القصوى لتخفيض هذا النشاط ثمانية أيام، وبهذه الخطة يمكن أن يتم تنفيذ المشروع في 76 يوماً بتكلفة إجمالية قدرها 50250 وحدة نقدية.

كما تتضمن الخطة الثالثة الإسراع في تنفيذ النشاط l وهو النشاط التالي الأقل زيادة في التكلفة، وتستغرق هذه الخطة74 يوماً بتكلفة إجمالية قدرها 50565 وحدة نقدية.

النشاط التالي الأقل زيادة في التكلفة والذي يقع على المسار الحرج هو النشاط g، وبالرغم من أنه يمكن تخفيض فترة تنفيذه بستة أيام بالإسراع به من عشرين يوماً إلي أربعة عشر يوماً، فإن تخفيضه بأكثر من أربعة أيام سوف يغير المسار الحرج السابق ويؤثر في فترة تنفيذ المشروع، وبناء على ذلك فإن الخطة الرابعة تتضمن تخفيضه بأربعة أيام ويخفض ذلك فترة تنفيذ المشروع إلى 70 يوماً بتكلفة إجمالية قدرها 51765 وحدة نقدية.

يلاحظ أنه يوجد الآن ثلاثة مسارات حرجة طول كل منها 70 يوماً وهي: a b c f k m و a b c h l n و a b c g j l n.

وتتضمن الخطة الخامسة الإسراع بتنفيذ النشاط n والإسراع الجزئي بالنشاط m بتخفيض يومين لكل نشاط.

ويلاحظ أن النشاط a هو نشاط مشترك في المسارات الحرجة في الخطط السابقة، والإسراع في تنفيذ هذا النشاط هو أقل التغيرات التالية تكلفة حيث يكلف تخفيض اليوم الواحد 450 وحدة نقدية، وبتخفيض فترة تنفيذه بيومين نحصل على

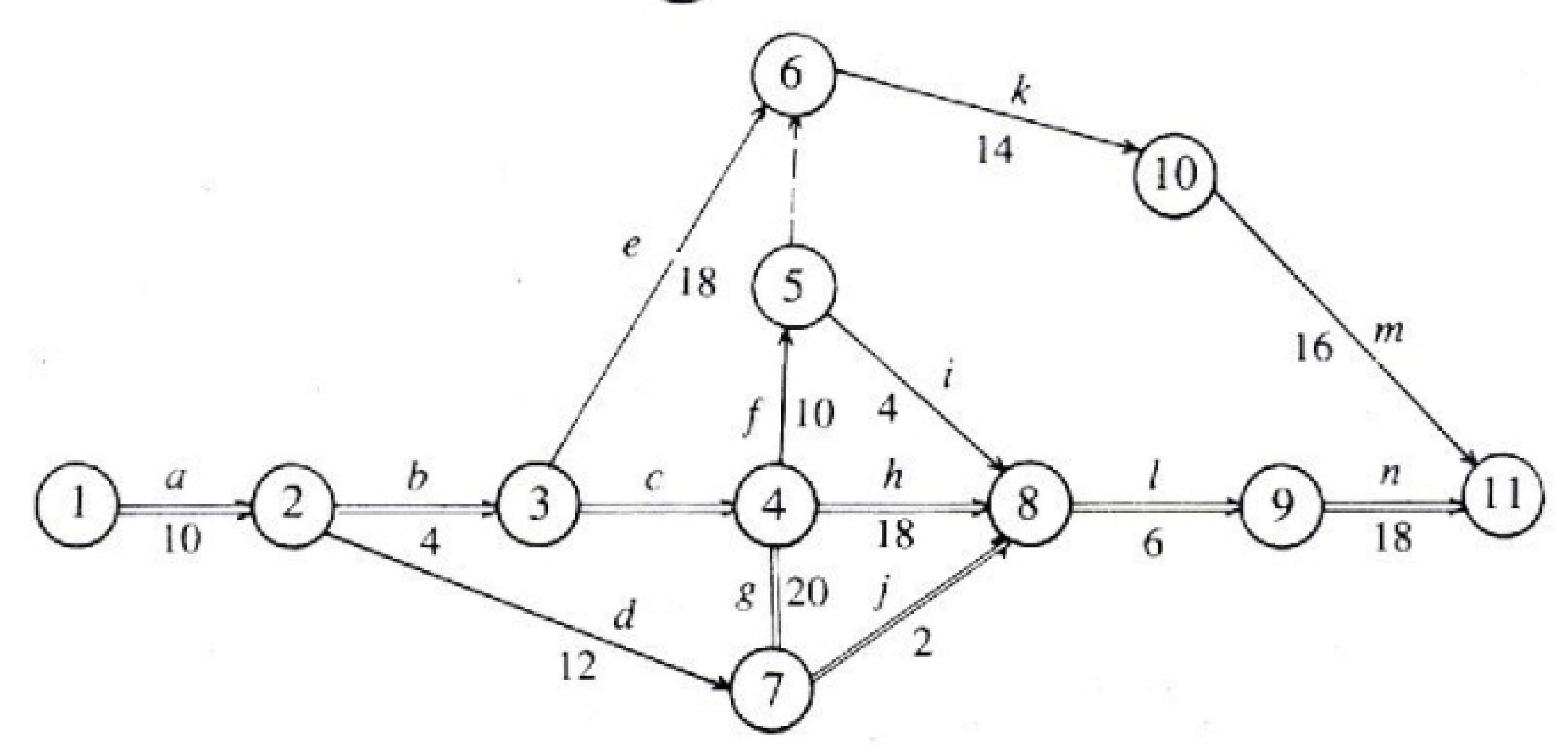
الخطة السادسة وتصبح التكلفة الإجمالية المقابلة 53415 وحدة نقدية.

وتتضمن الخطة السابعة تخفيض النشاط g بيومين، وهو النشاط الوحيد المتبقي في المسار الحرج الأصلي الذي لم يخفض، وتتضمن الخطة السابعة أيضاً تخفيضاً جزئياً قدره يومان لكل نشاط من النشاطين h و m، وتكون التكلفة الإضافية المقابلة للخطة السابعة 1125 وحدة نقدية، وتصبح تكلفة المشروع الإجمالية المقابلة للخطة السابعة 54540 وحدة نقدية. ونلخص في الجدول الآتي البيانات والنتائج المقابلة للخطط البديلة لتنفيذ المشروع:

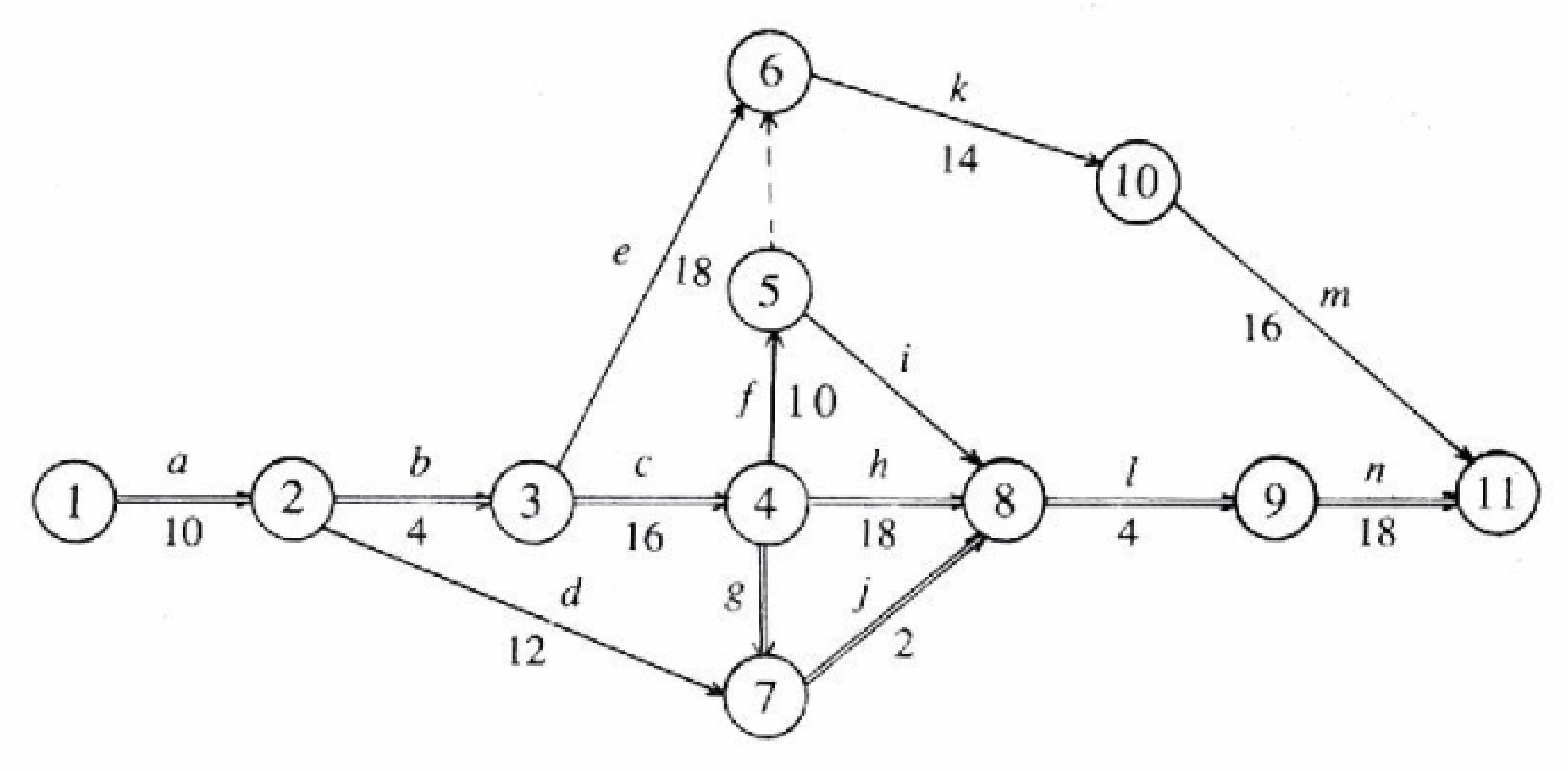
جدول(٢)

المسار الحرج	التكلفة المضافة مقابل تخفيض يوم واحد	فترة تخفيض النشاط التعجيلي باليوم	النشاط التعجيلي	تكلفة المشروع	وقت تنفيذ المشروع	خطة المشروع
a b c g j l n	—	—	—	49050	84	1
a b c g j l n	150	8	c	50250	76	2
a b c g j l n	157.5	2	l	50565	74	3
a b c g j l n	300	4	g	51765	70	4
a b c h l n						
a b c f k m						
a b c g j l n	337.5	2	n	52515	68	5
a b c h l n	37.5	2	m			
a b c f k m						
a b c g j l n	450	2	a	53415	66	6
a b c h l n						
a b c f k m						
a b c g j l n	300	2	g	54540	64	7
a b c h l n	225	2	h			
a b c f k m	37.5	2	m			

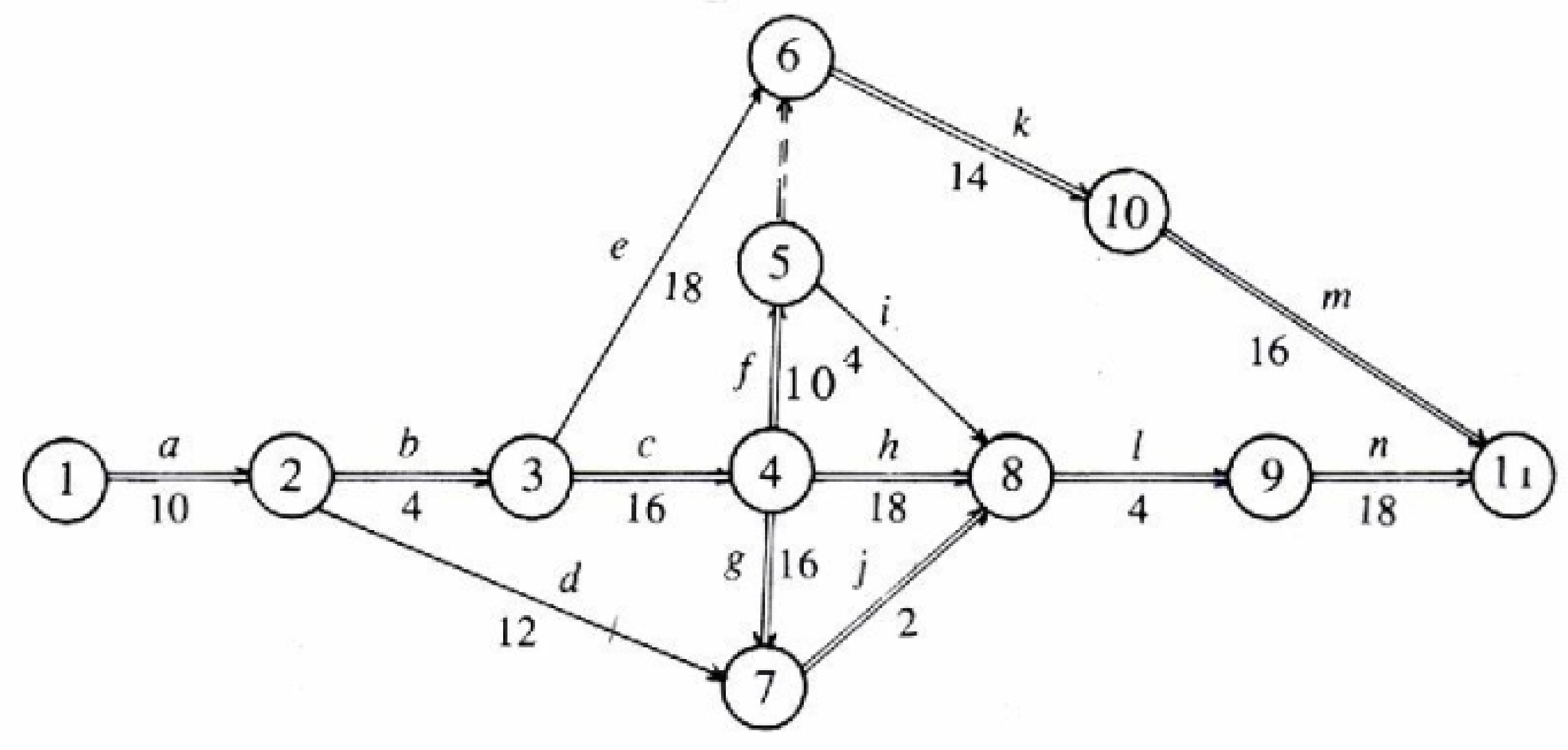
وفيما يلي شبكة أعمال المشروع المقابلة للخطط المختلفة المعجلة من الخطة الثانية إلى الخطة السابعة، وسنميز النشاط الحرج بالعلامة ⇐ .



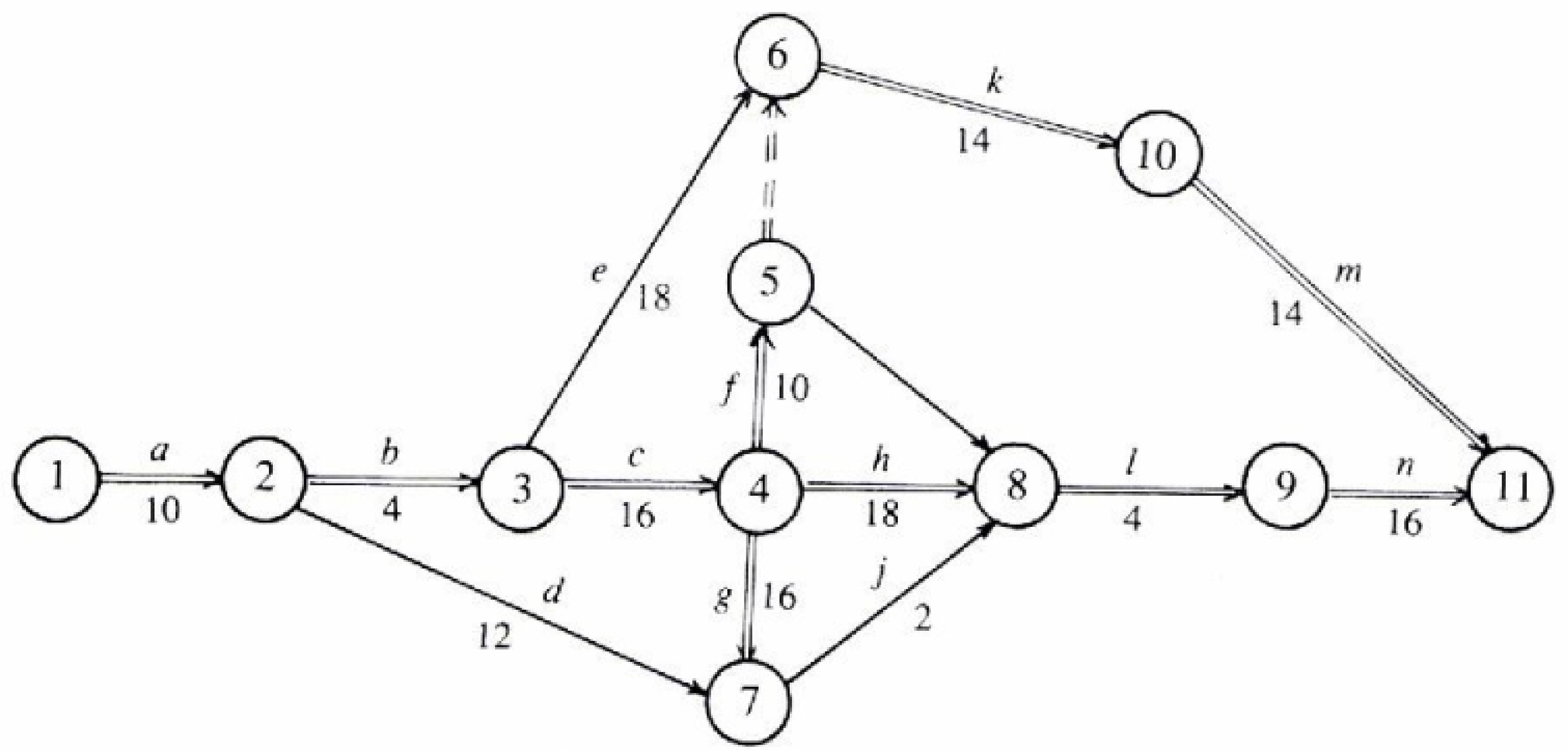
شكل (٣) شبكة أعمال المشروع طبقاً للخطة الثانية.



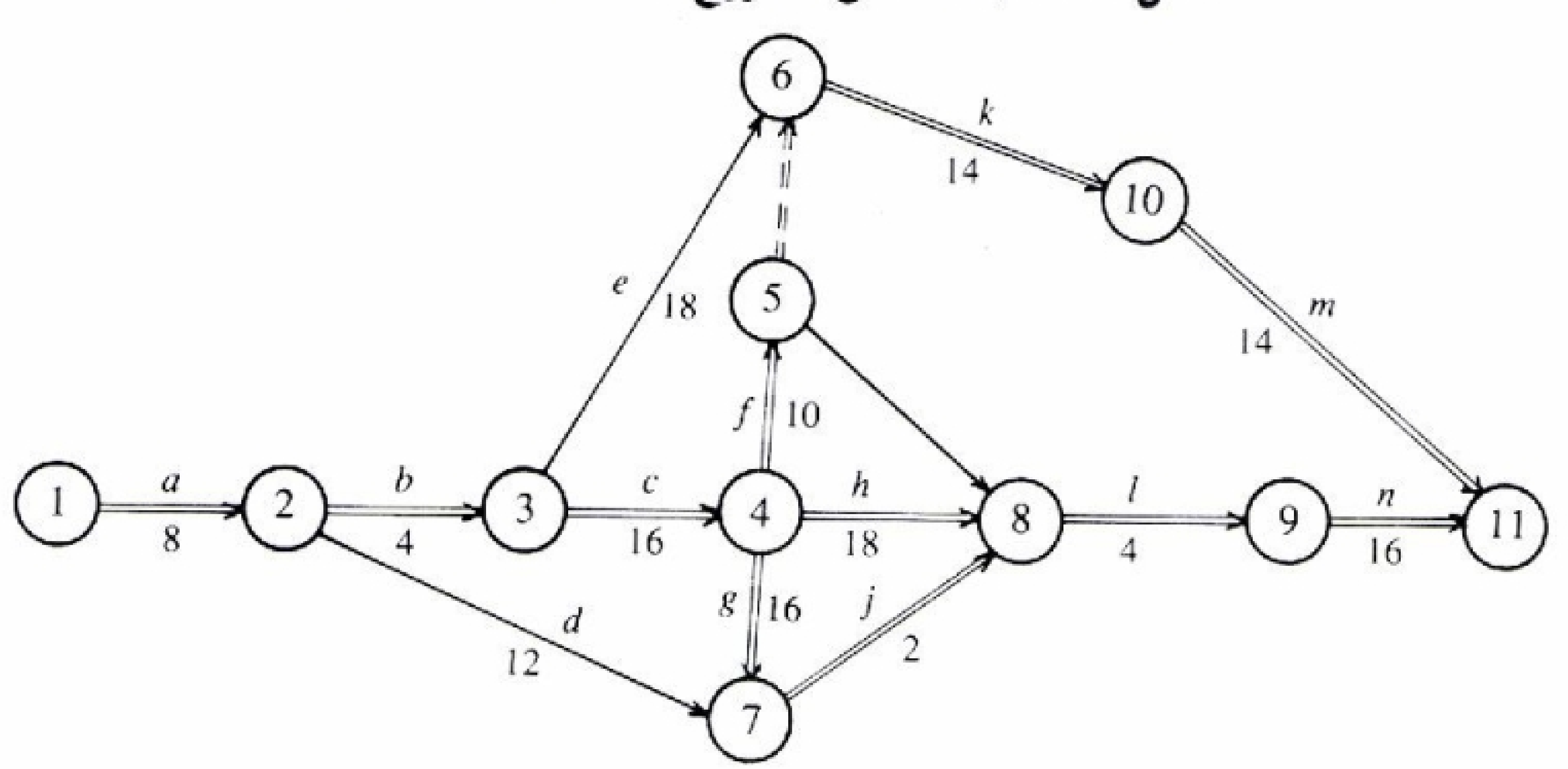
شكل (٤) شبكة أعمال المشروع طبقاً للخطة الثالثة.



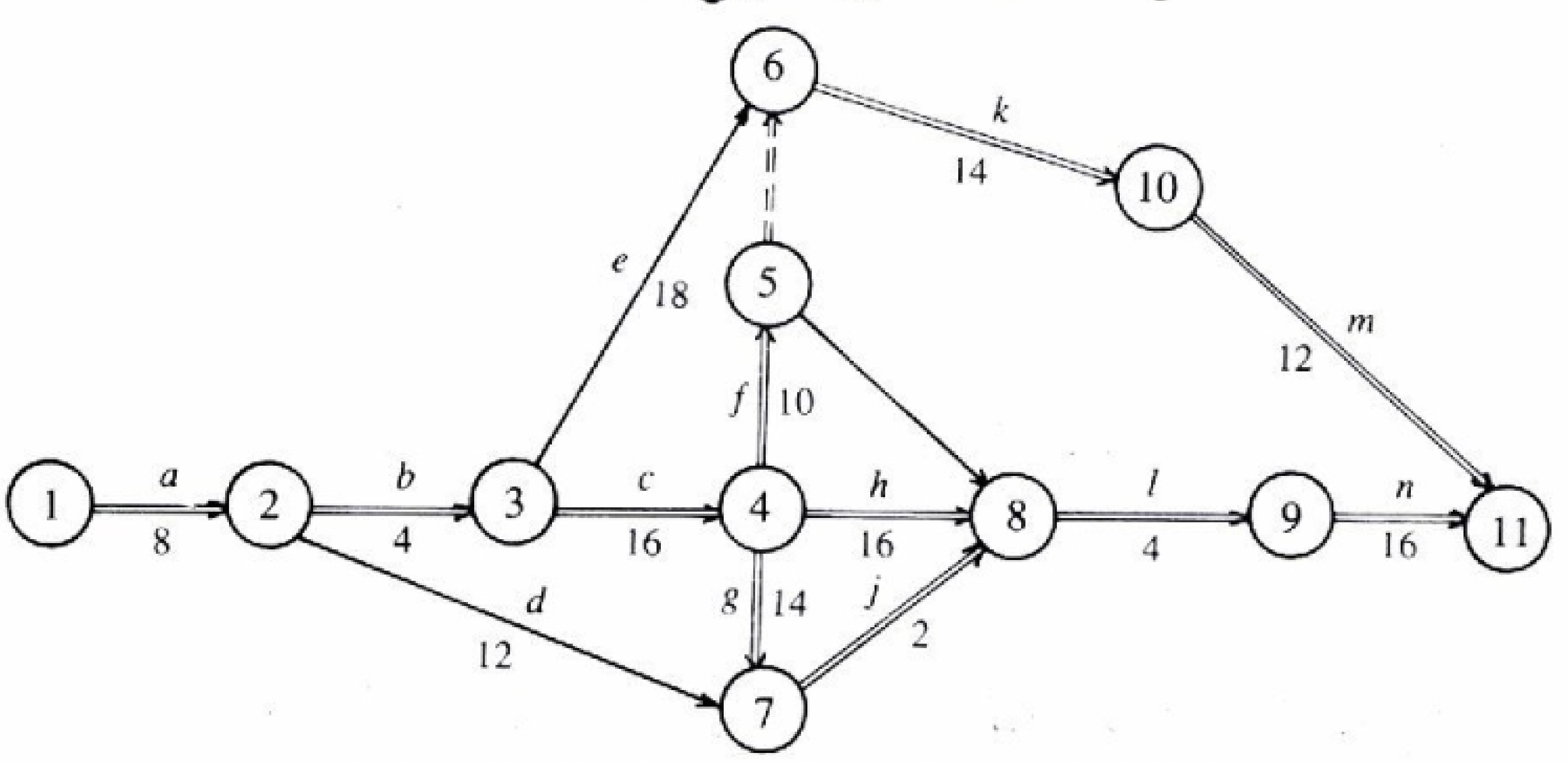
شكل (٥) شبكة أعمال المشروع طبقاً للخطة الرابعة.



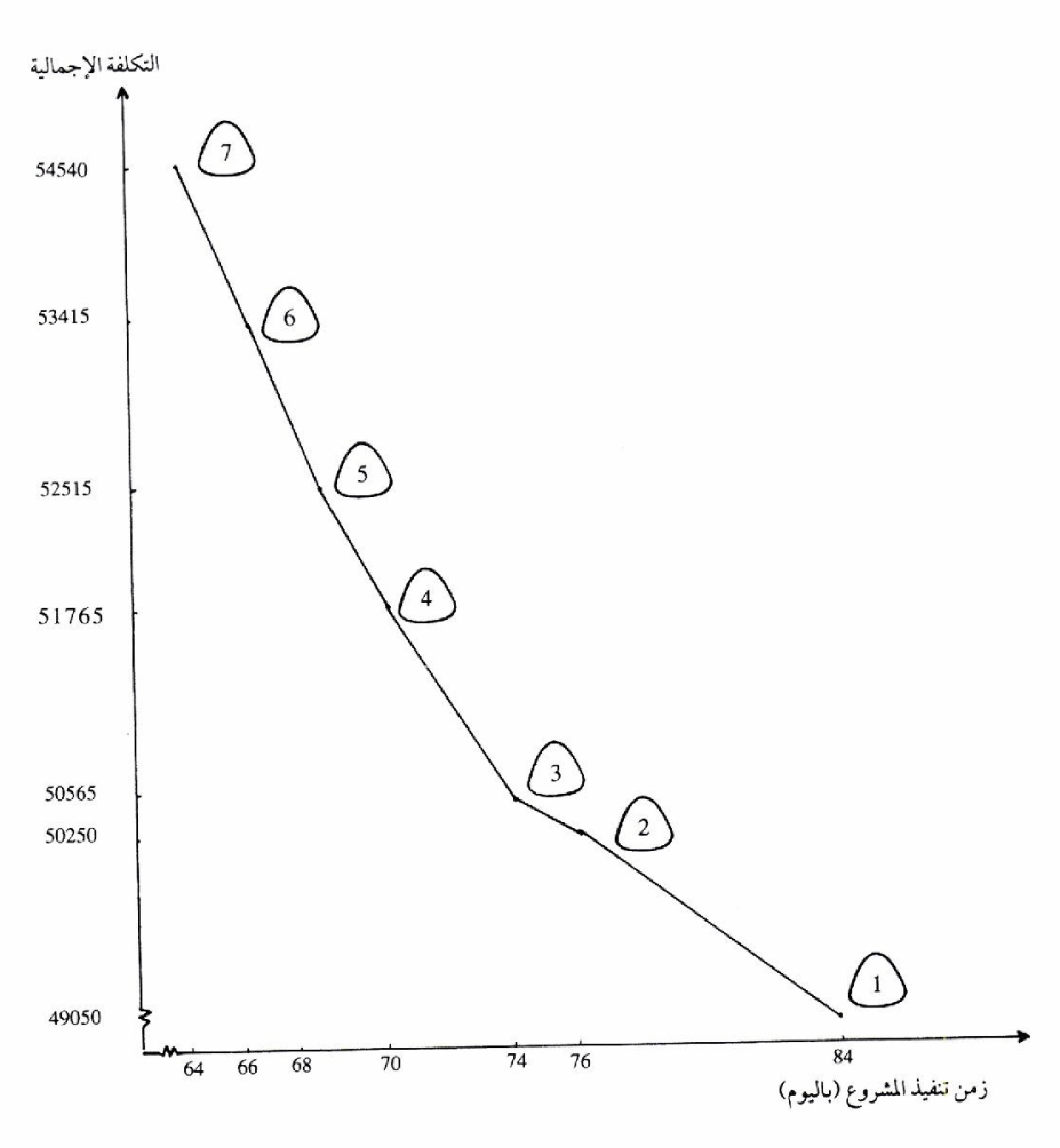
شكل (٦) شبكة أعمال المشروع طبقاً للخطة الخامسة.



شكل (٧) شبكة أعمال المشروع طبقاً للخطة السادسة.



شكل (٨) شبكة أعمال المشروع طبقاً للخطة السابعة.



شكل (٩) : منحنى الزمن - التكلفة للمشروع

ومن جدول (٢) نرسم منحنى الزمن - التكلفة للمشروع كالتالي :

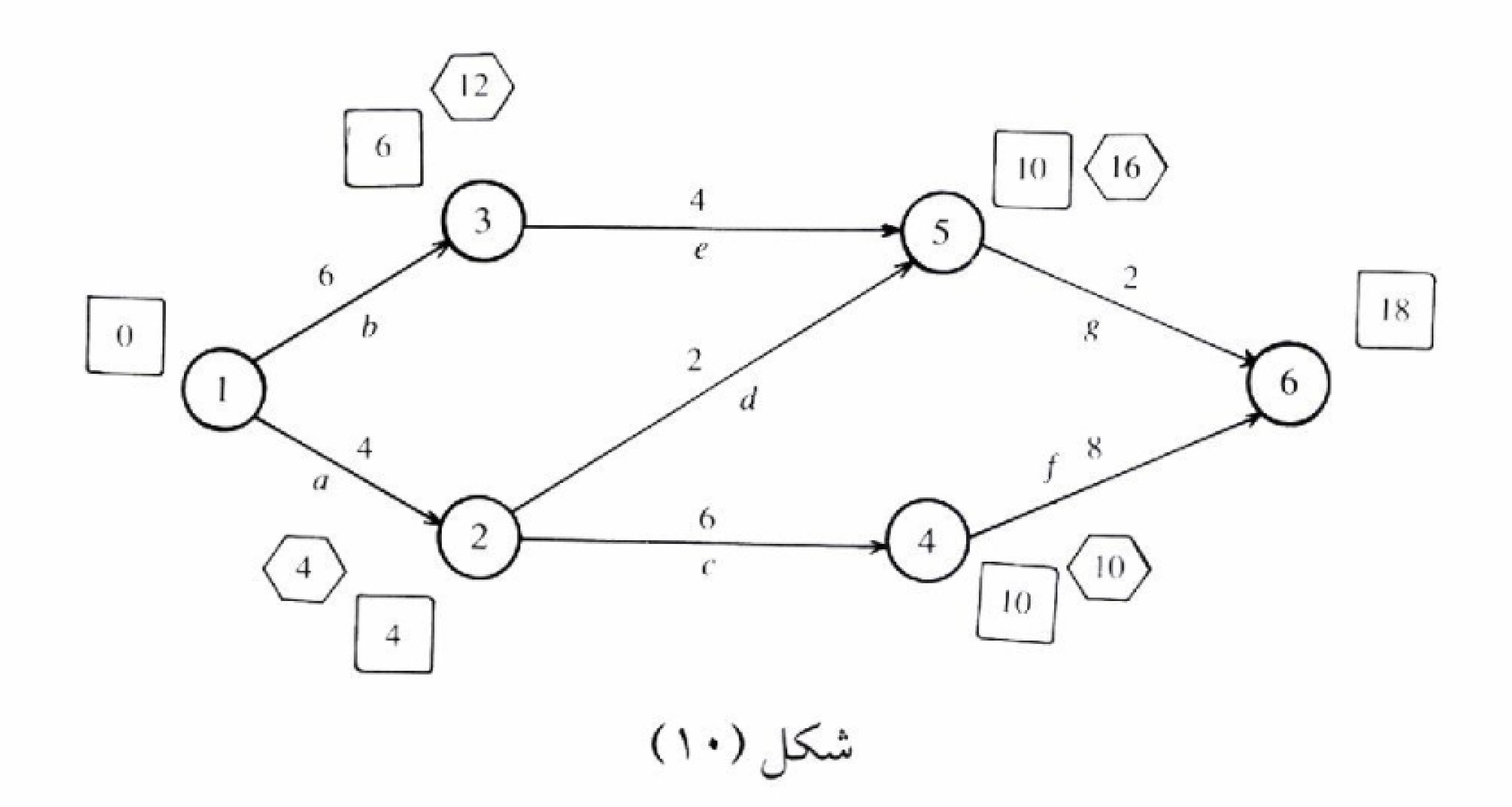
مثال٢ :

أعطيت بيانات مشروع معين كما في الجدول الآتي :

جدول (٣)

رمز النشاط	الأنشطةلسابقة مباشرة	مدة تنفيذ النشاط باليوم في الخطة العادية	مدة تنفيذ النشاط باليوم في الخطة التعجيلية	تكلفة تنفيذ النشاط في الخطة العادية	تكلفة تنفيذ النشاط في الخطة التعجيلية	تكلفة توفير يوم
a	**لايوجـــد**	4	2	6	10	2
b	**لايوجـــد**	6	4	8	10	1
c	a	6	4	4	12	4
d	a	2	1	2	6	2
e	b	4	2	10	16	8
f	c	8	4	6	8	0.5
g	d,e	2	2	4	4	—

لإيجاد الخطط البديلة لتخفيض فترة تنفيذ المشروع بأقل تكلفة ممكنة، نكون أولاً شبكة أعمال المشروع طبقاً للخطة العادية ونحسب عليها ES وLF لكل حدث كالتالي :



شكل (١٠)

ونحدد LF وEF وLS وES لكل نشاط والمسار الحرج كما في الجدول الآتي :

جدول (٤)

رمز النشاط	رقم النشاط		فترة تنفيذ النشاط	أوقات البداية		أوقات النهاية		الفائض الإجمالي	المسار الحرج
	i	J		ES	LS	EF	LF		
a	1	2	4	0	0	4	4	0	*
b	1	3	6	0	6	6	12	6	
c	2	4	6	4	4	10	10	0	*
d	2	5	2	4	14	6	16	10	
e	3	5	4	6	12	10	16	6	
f	4	6	8	10	10	18	18	0	*
g	2	6	2	10	16	12	18	6	

من الجدول السابق، نجد أن الأنشطة التي تقع على المسار الحرج طبقاً للخطة العادية هي f وc وa، وأن مدة تنفيذ المشروع 18 يوماً، والتكلفة الكلية المقابلة 40.

النشاط الحرج الأقل زيادة في التكلفة هو f، ويمكن تخفيض فترة تنفيذه بأربعة أيام دون أن يتغير المسار الحرج، فيصبح طول المسار الحرج 14 يوماً، والتكلفة الكلية المقابلة 42.

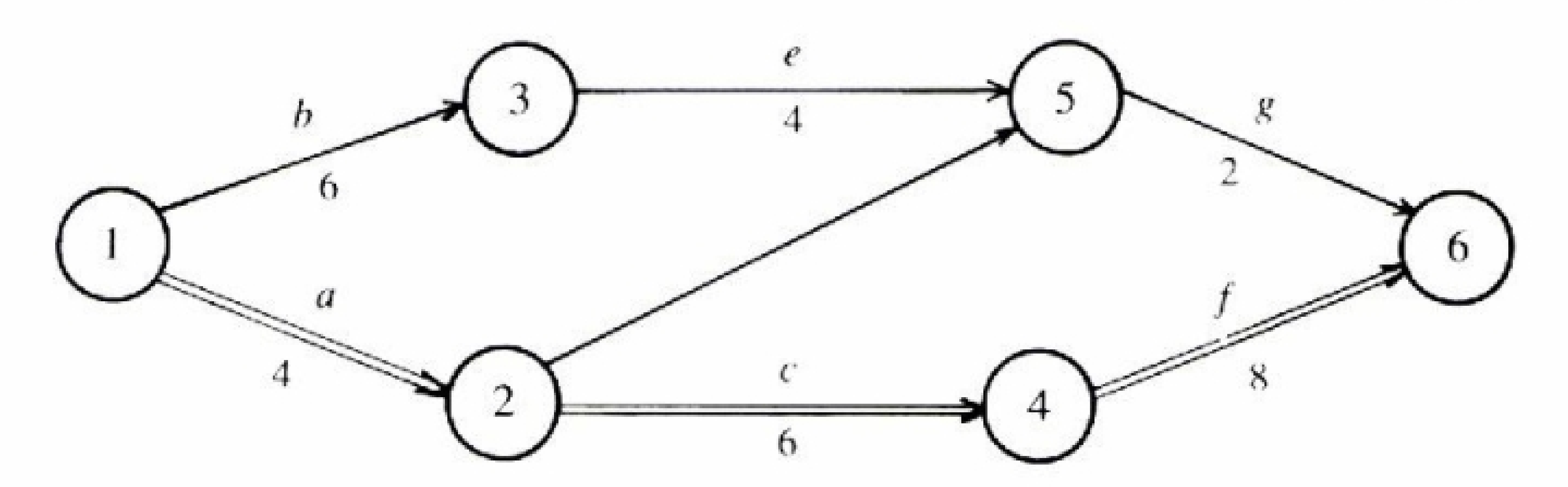
وبالنظر للنشاطين الآخرين على هذا المسار الحرج، نجد أن النشاط الأقل زيادة في التكلفة هو a و يمكن تخفيض فترة تنفيذه بيومين بتكلفة 4، وتصبح مدة تنفيذ المشروع 12 يوماً، والتكلفة الكلية المقابلة 46. ويظهر في هذه الحالة مسار حرج آخر هو beg، ولتخفيض فترة تنفيذ المشروع يجب تخفيض المسارين a c f و b e g معا. وبالنظر للمسار a c f، نجد أنه يمكن تخفيض النشاط c بيومين بتكلفة 8. وبالنظر للمسار b e g، نجد أنه يمكن تخفيض النشاط b بيومين بتكلفة 2، فتصبح التكلفة الكلية لتنفيذ المشروع 56، وتصبح فترة تنفيذه عشرة أيام، ويكون ذلك أكبر تخفيض ممكن في فترة تنفيذ المشروع طبقا للبيانات المتاحة.

ويمكن توضيح الخطط البديلة لتخفيض فترة تنفيذ المشروع في الجدول الآتي :

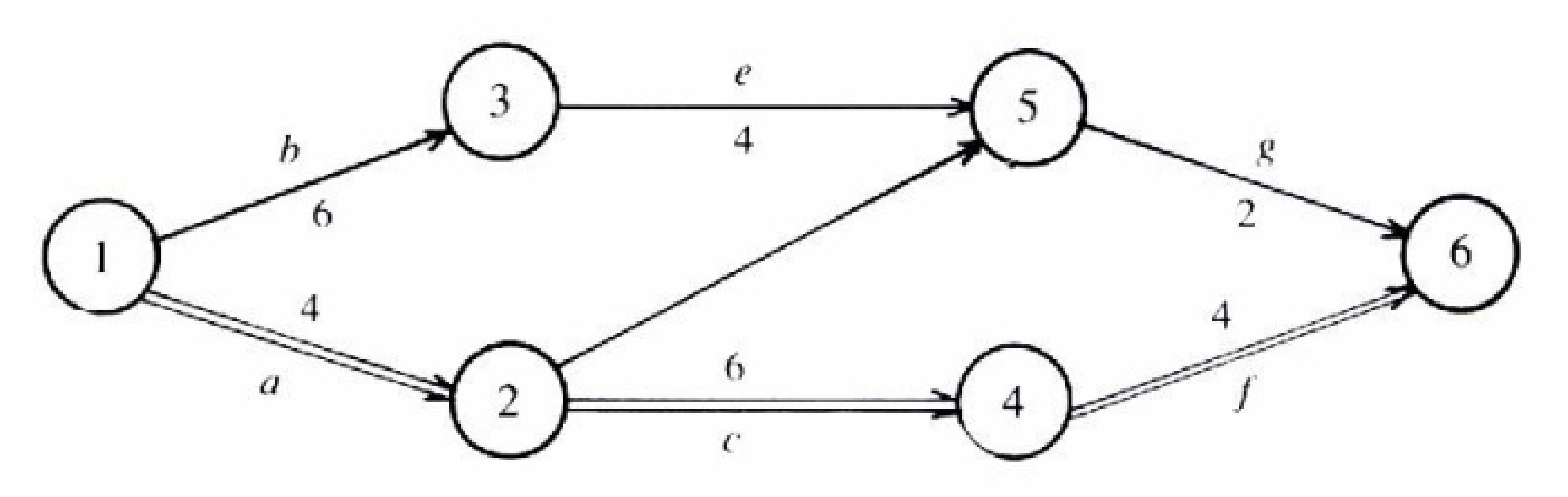
جدول (٥)

الأنشطة الحرجة	التكلفة المقابلة لتخفيض يوم	الأنشطة التعجيلية وفترة تخفيضها	تكلفة المشروع	وقت تنفيذ المشروع	خطة المشروع
f و c و a	—	—	40	18	1
f و c و a	.5	النشاط f بأربعة أيام	42	14	2
f و c و a	2	النشاط a بيومين	46	12	3
b, e, g					
f و c و a	4	النشاط c ببيومين	56	10	4
b, e, g	1	النشاط b بيومين			

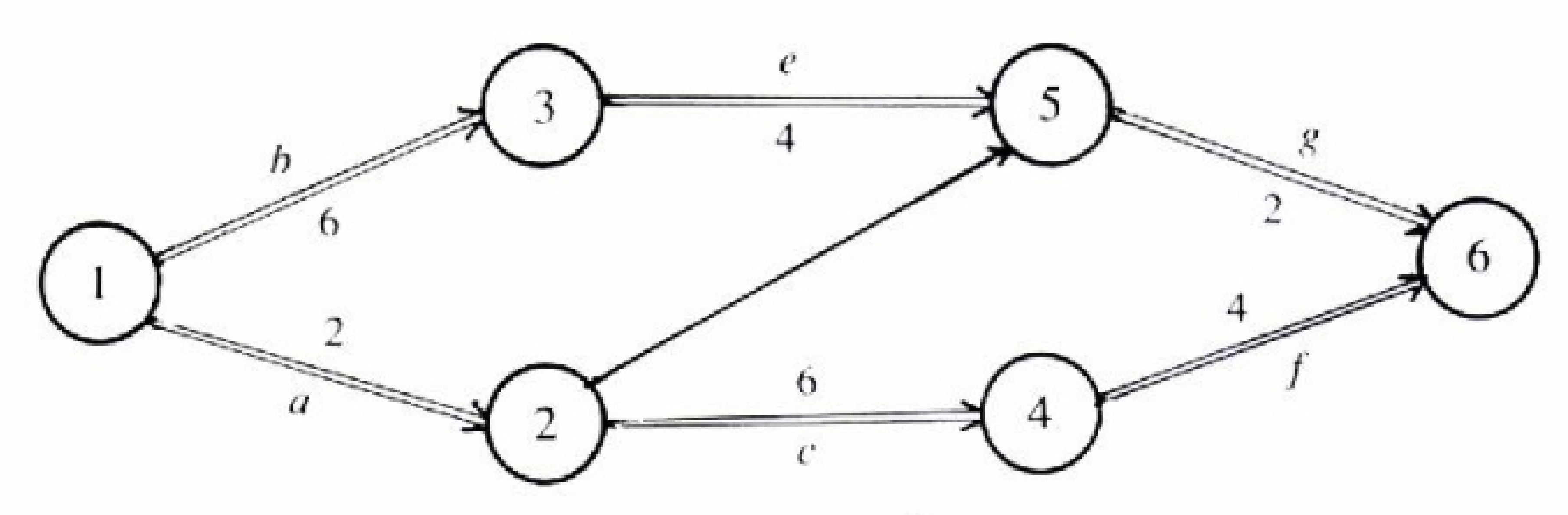
وفيما يلي شبكات أعمال المشروع والأنشطة الحرجة في كل شبكة طبقاً للخطط المختلفة :



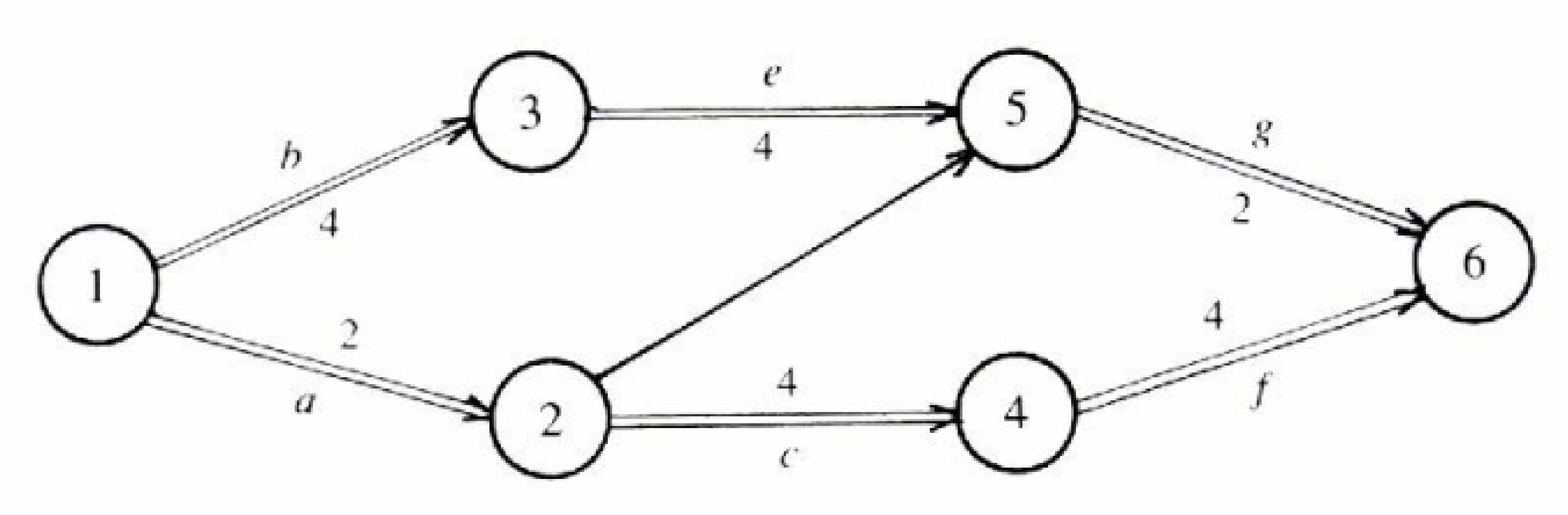
شكل (١١) شبكة أعمال المشروع طبقا للخطة العادية.



شكل (١٢) شبكة أعمال المشروع طبقا للخطة الثانية.

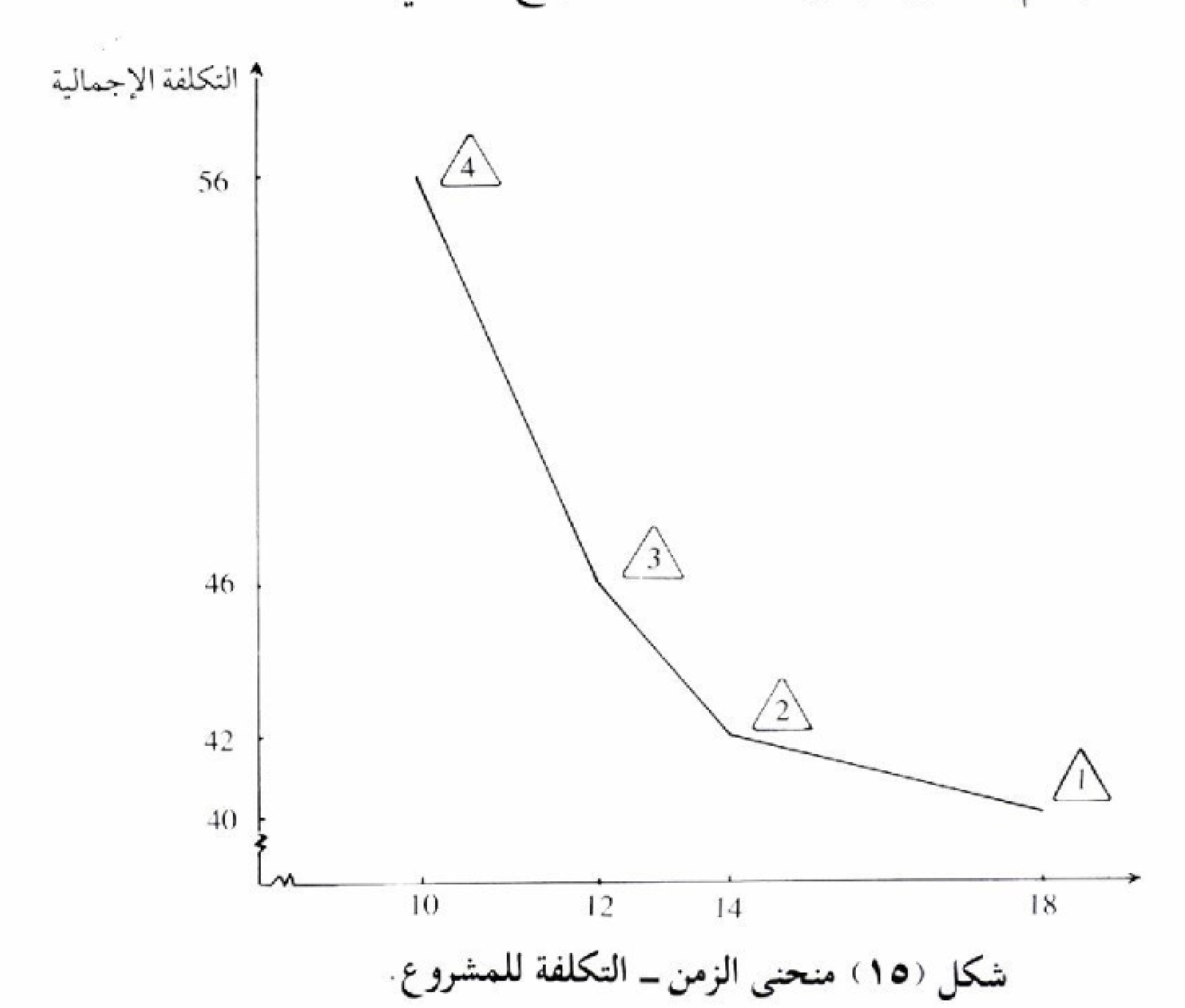


شكل (١٣) شبكة أعمال المشروع طبقا للخطة الثالثة.



شكل (١٤) شبكة أعمال المشروع طبقا للخطة الرابعة.

ومن جدول(٥) نرسم منحنى الزمن ـ التكلفة للمشروع كالتالي :



شكل (١٥) منحنى الزمن ـ التكلفة للمشروع.

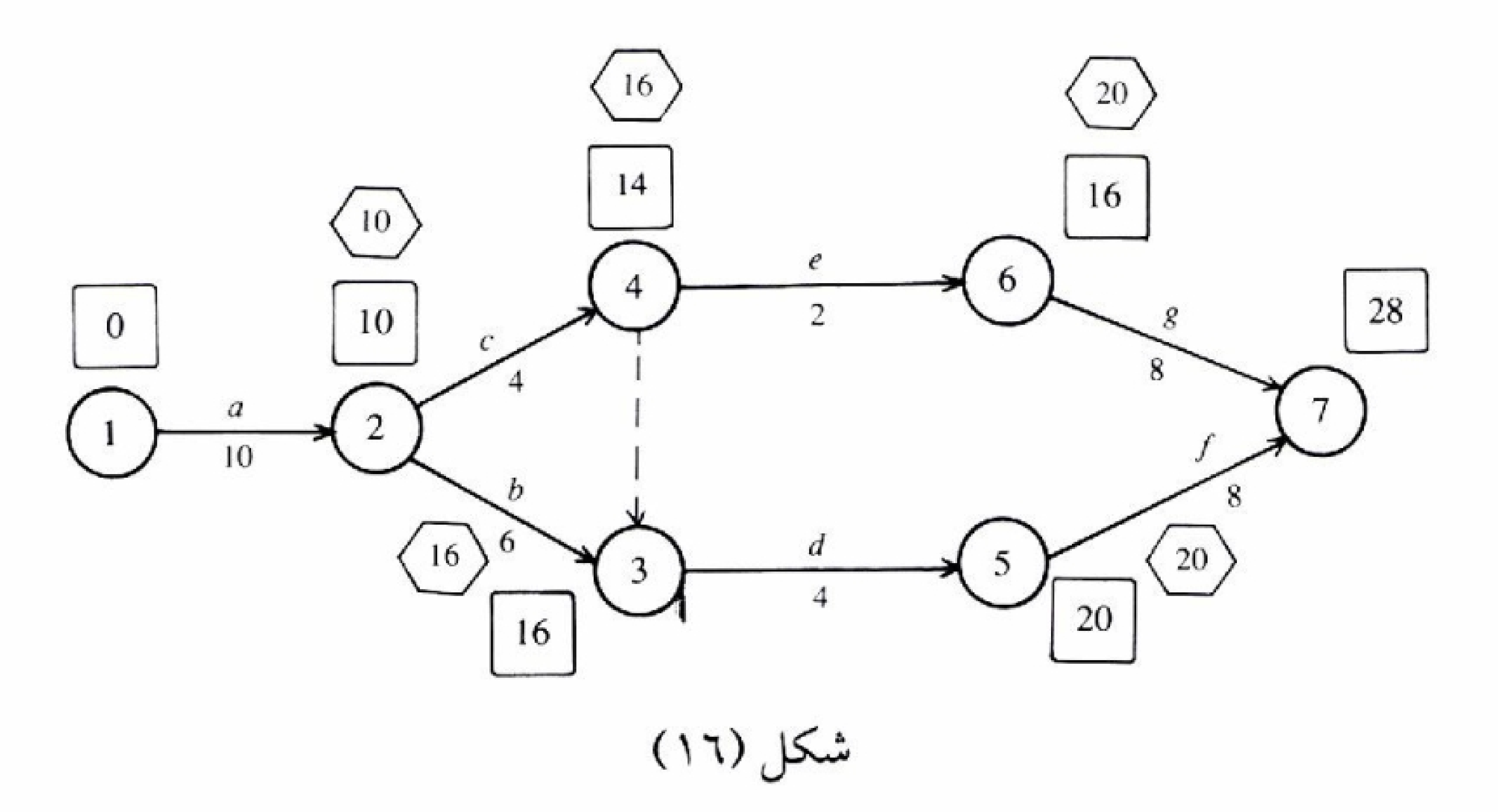
مثال ٣ :

أوجد الخطط البديلة لتخفيض زمن تنفيذ مشروع معين بأقل تكلفة ممكنة في ضوء بيانات الجدول الآتي :

جدول (٦)

رمز النشاط	الأنشطةلسابقة مباشرة	مدة تنفيذ النشاط باليوم		تكلفة تنفيذ النشاط		تكلفة توفير يوم
		فى الخطة العادية	فى الخطة التعجيلية	فى الخطة العادية	فى الخطة التعجيلية	
a	لايوجـــد	10	8	20	40	10
b	a	6	4	60	70	5
c	a	4	2	40	65	12.5
d	b, c	4	2	50	60	5
e	c	2	2	80	80	—
f	d	8	4	100	180	20
g	e	8	4	30	70	10
				380		

كما في المثال السابق سنكون أولاً شبكة أعمال المشروع طبقاً للخطة العادية ونحسب عليها LF و ES لكل حدث كالتالي :



شكل (١٦)

ونحدد LF و EF و LS و ES لكل نشاط والمسار الحرج كما في الجدول الآتي :

جدول (٧)

رمز النشاط	رقم النشاط i	j	فترة تنفيذ النشاط D_{ij}	أوقات البداية ES	LS	أوقات النهاية EF	LF	الفائض الإجمالي	المسار الحرج
a	1	2	10	0	0	10	10	0	*
b	2	3	6	10	10	16	16	0	*
c	2	4	4	10	12	14	16	2	
d	3	5	4	16	16	20	20	0	*
e	4	6	2	14	18	16	20	4	
f	5	7	8	20	20	28	28	0	*
g	6	7	8	16	20	24	28	4	

من الجدول السابق، نجد أن المسار الحرج هو a b d f وأن وقت تنفيذ المشروع هو 28 يوماً بتكلفة 380، وهي تكلفة المشروع في الخطة العادية.

بالنظر للأنشطة الحرجة، نجد أنه يمكن تخفيض النشاط b أو النشاط d لأن كلا منهما يقابل أقل تكلفة زائدة وهي 5. سنخفض النشاط b أقصى تخفيض ممكن، وهو يومان، بتكلفة 10، ويصبح لدينا مساران حرجان هما a b d f و a c d f طول كل منهما 26 يوماً بتكلفة كلية قدرها 390.

التخفيض التالي هو تخفيض النشاط d بيومين بتكلفة 10، وهو نشاط مشترك في المسارين السابقين ويصبح لدينا ثلاثة مسارات حرجة وهي :

a b d f و a c d f و a c e g

وفترة تنفيذ كل منها 24 يوماً بتكلفة كلية قدرها 400. ويلاحظ أن النشاط المشترك في المسارات الثلاثة السابقة هو النشاط a، وهو الأقل تكلفة في الأنشطة الممكن تخفيضها، ويمكن تخفيض هذا النشاط بيومين بتكلفة قدرها 20، ويصبح وقت تنفيذ المشروع 22 يوماً والتكلفة المقابلة 420.

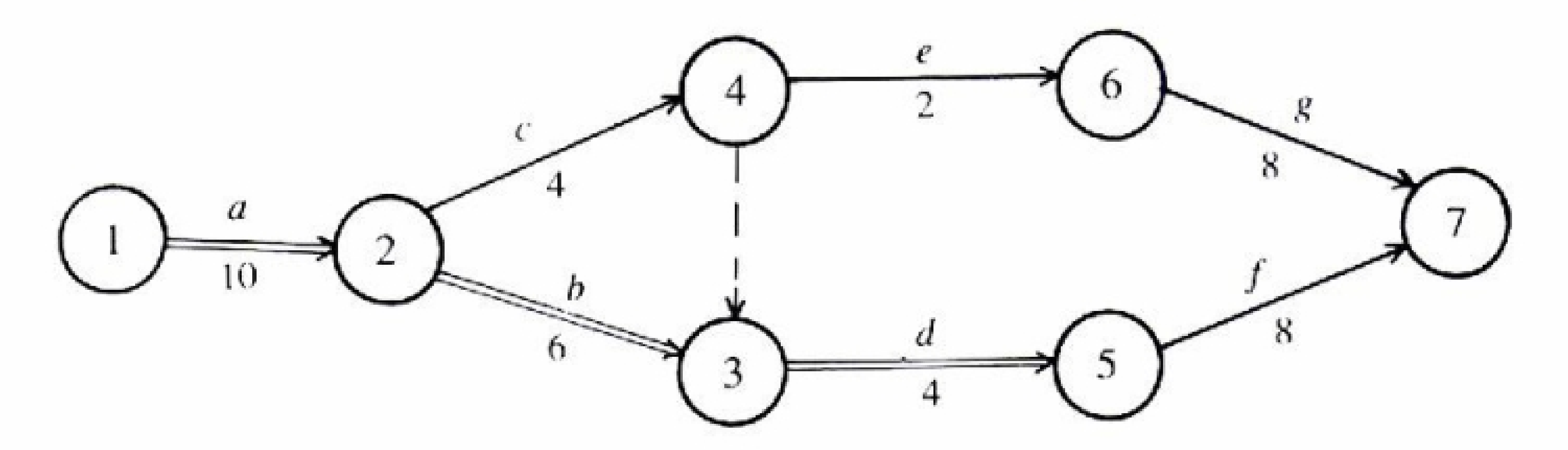
وأخيراً، نجد أنه يمكن تخفيض كل من g و f بأربعة أيام، فتصبح فترة تنفيذ المشروع 18 يوماً بتكلفة كلية قدرها 540، ويكون ذلك آخر تخفيض ممكن في فترة تنفيذ أنشطة المشروع طبقاً للبيانات المعطاة.

ونلخص في جدول(٨) بيانات الخطط البديلة لتخفيض فترة تنفيذ المشروع.

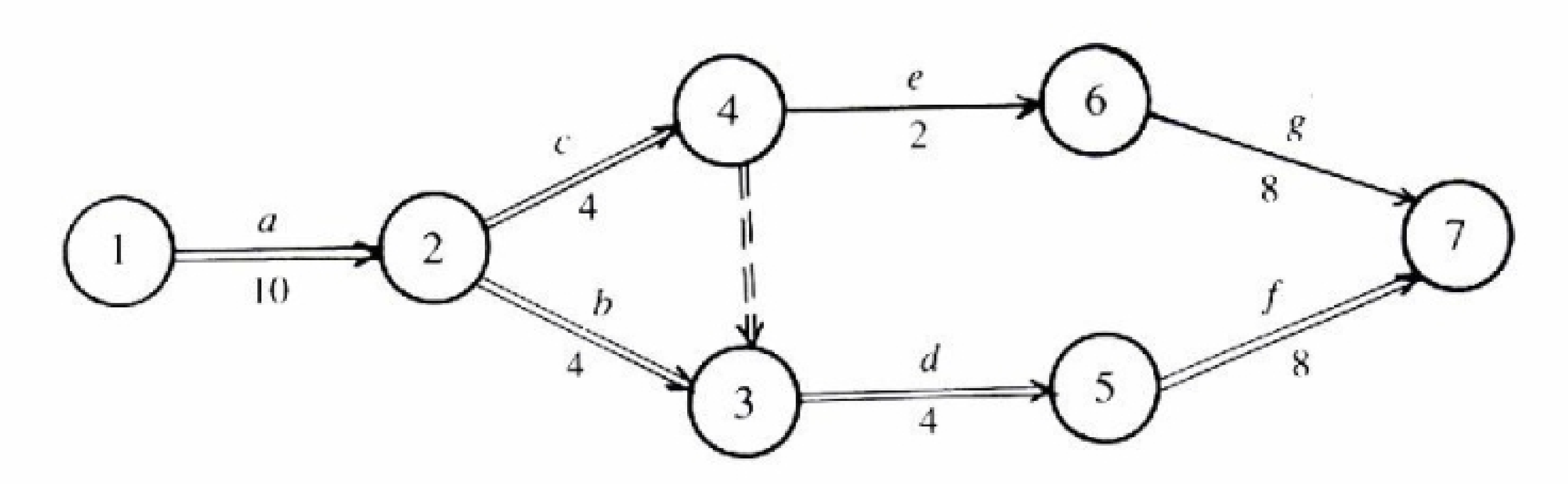
جدول (٨)

المسار الحرج	التكلفة المقابلة لتخفيض يوم	فترة تخفيض الأنشطة التعجيلية	الأنشطة التعجيلية	تكلفة المشروع	وقت تنفيذ المشروع	خطة المشروع
a b d f	—	—	—	380	28	1
a b d f	5	يومان	b	390	26	2
a c d f						
a b d f	5	يومان	d	400	24	3
a c d f						
a c e g						
a b d f	10	يومان	a	420	22	4
a c d f						
a c e g						
a b d f	20	أربعة أيام	f	540	18	5
a c d f	10	أربعة أيام	g			
a c e g						

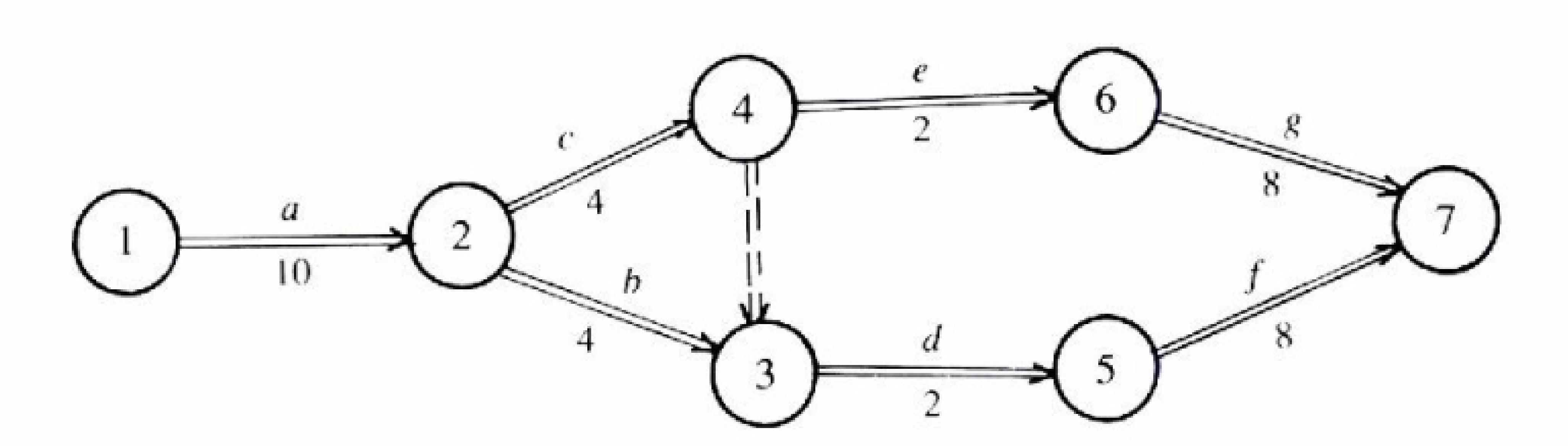
وفيما يلي شبكات أعمال المشروع والأنشطة الحرجة في كل شبكة طبقا للخطط المختلفة بدلا من:



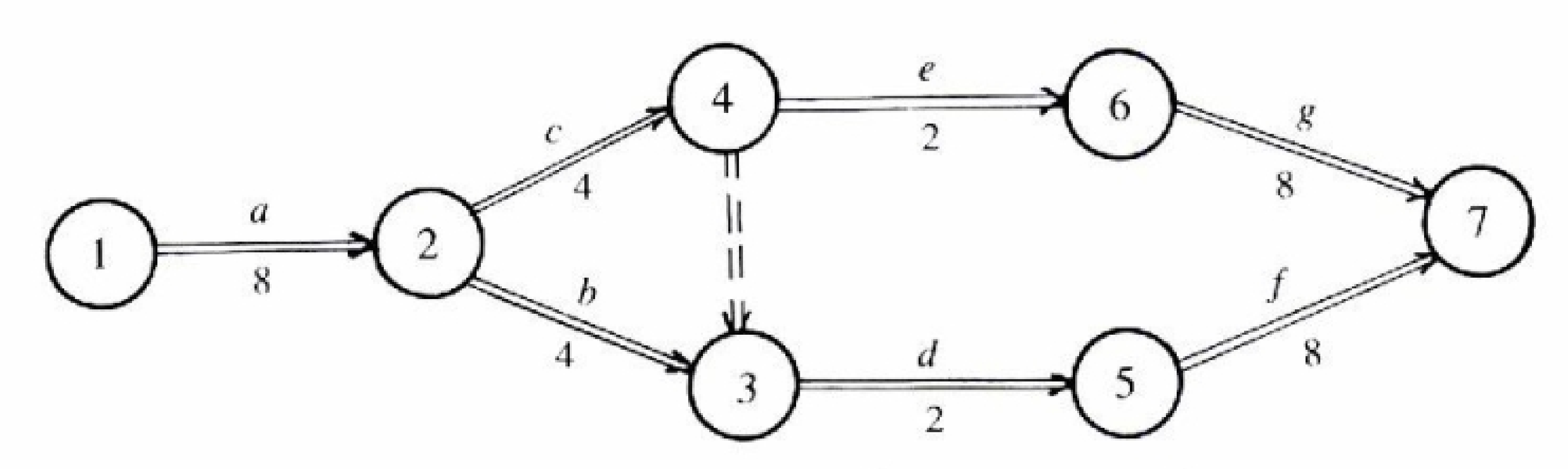
شكل (١٧) شبكة أعمال المشروع طبقا للخطة الأولي.



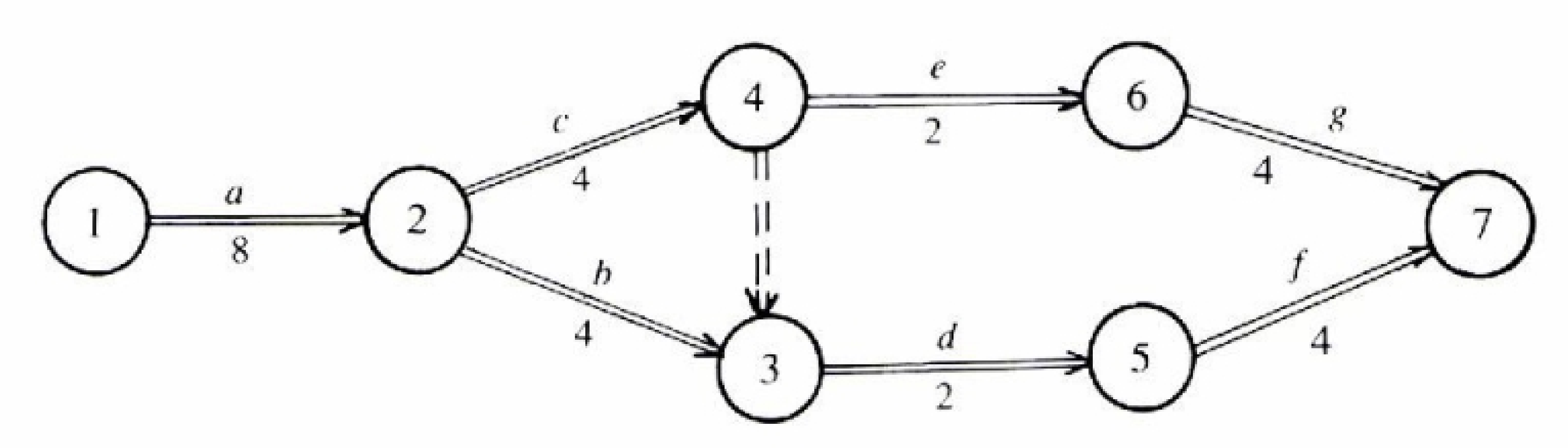
شكل (١٨) شبكة أعمال المشروع طبقا للخطة الثانية.



شكل (١٩) شبكة أعمال المشروع طبقا للخطة الثالثة.



شكل (٢٠) شبكة أعمال المشروع طبقا للخطة الرابعة.



شكل (٢١) شبكة أعمال المشروع طبقا للخطة الخامسة.

ومن جدول (٨) نرسم منحنى الزمن ـ التكلفة للمشروع كالتالي :

التكلفة الإجمالية

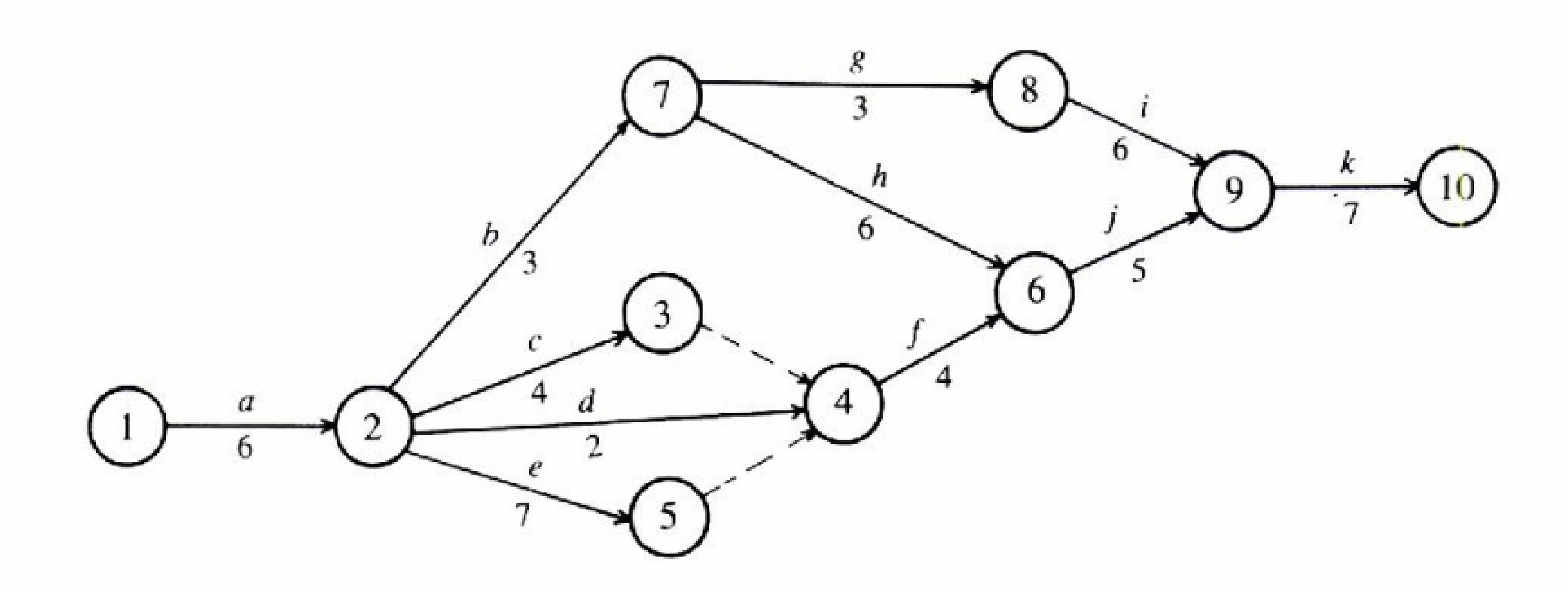
5
540
4
420
3
400
2
390
1
380
18
22
24
26
28

زمن تنفيذ المشروع باليوم

شكل (٢٢) منحنى الزمن ـ التكلفة للمشروع.

تطبيقات

١ - فيما يلي شبكة أعمال مشروع معين :



والمطلوب حساب LF و ES لكل حدث ثم تكوين جدول لحساب LF وEF وLS وES للأنشطةوكذلك الفائض الإجمالي والفائض الحر لكل نشاط والمسار الحرج .

٢ - فيما يلي بيانات خاصة بمشروع معين :

النشاط	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
الأنشطة السابقة مباشرة	لايوجد	a	a	b,c	c	d	d,e	g	h	h	i,j	k	f,l
زمن تنفيذ النشاط بالأسبوع	0	3	7	6	8	7	8	2	5	6	4	9	0

والمطلوب رسم شبكة أعمال المشروع وتحديد المسار الحرج .

٣ - عند تنفيذ أحد المشروعات حصلنا على الجدول الآتي :

زمن تنفيذ النشاط باليوم	الأنشطة السابقة مباشرة	النشاط
6	لا يوجد	a
3	a	b
4	a	c
2	a	d
7	b, c, d	e
4	e	f
3	c	g
6	f, g	h

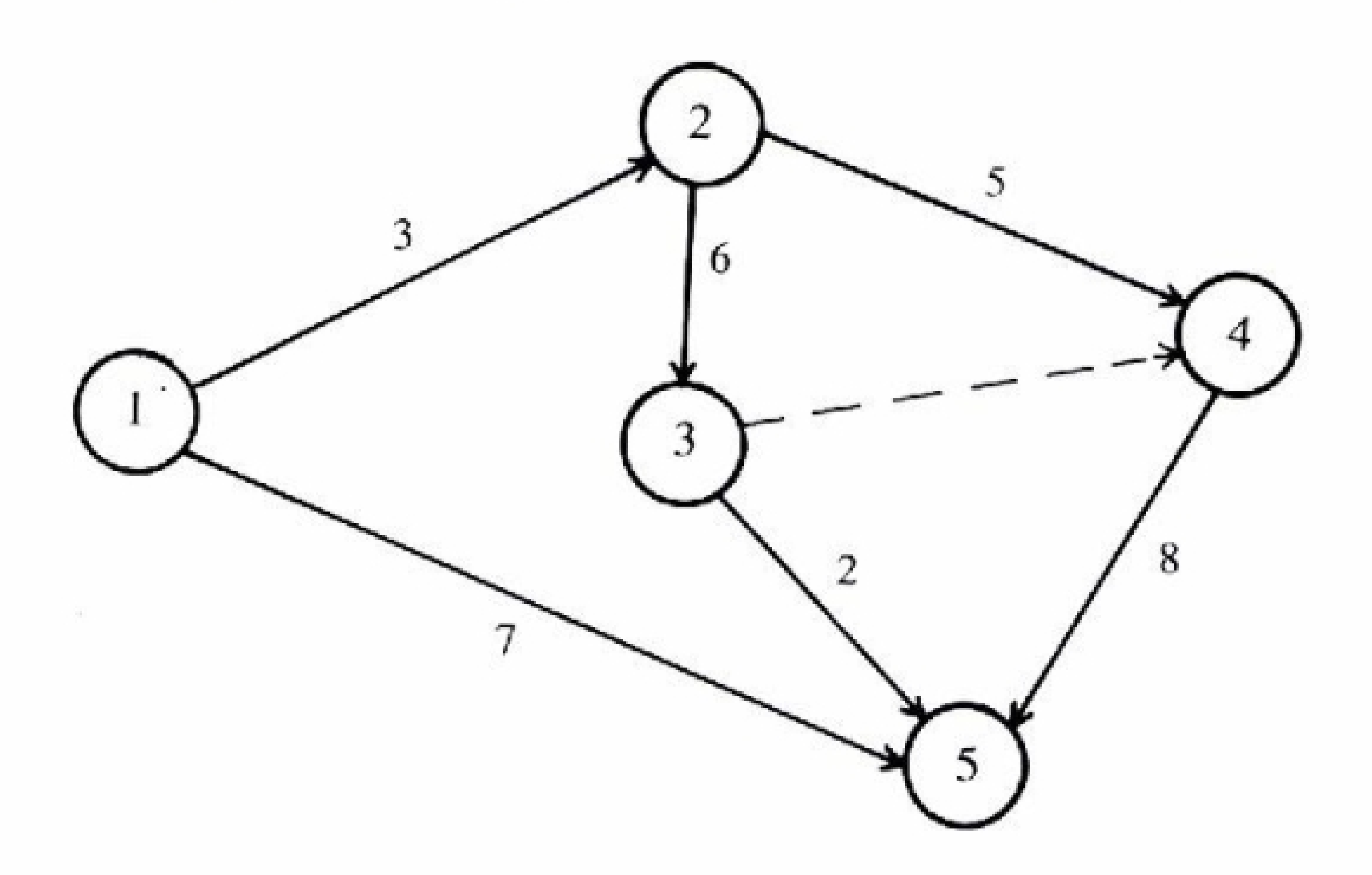
والمطلوب:

أ) رسم شبكة أعمال المشروع، ومنها حساب LF وES لكل حدث.

ب) تكوين جدول لحساب LF وEF وLS وES للأنشطة.

جـ) حساب الوقت الفائض لكل نشاط ومنه تحديد المسار الحرج.

٤ – سنفترض أن لدينا شبكة أعمال مشروع معين كالتالي:



حدد LF و ES لكل حدث، ومنها أوجد LF و LS و EF و ES لكل نشاط ثم حدد المسار الحرج.

٥ - توافرت لديك البيانات التالية عن أحد المشروعات:

رقم النشاط		الوقت المقدر لتنفيذ النشاط (باليوم)		
		المتفائل	الأكثر احتمالا	المتشائم
1	2	1	3	5
2	3	1	2	3
2	4	1	3	5
3	5	3	4	5
4	5	2	3	4
4	6	3	5	7
5	7	4	5	6
6	7	6	7	8

والمطلوب:

أ) تقدير الوقت المتوقع لكل نشاط والانحراف المعياري له.

ب) رسم شبكة أعمال المشروع وحساب LF و ES لكل حدث في الشبكة.

جـ) إعداد جدول لحساب LF و LS و EF و ES لكل نشاط، ثم تحديد فائض كل نشاط والمسار الحرج.

د) تحديد فترة تنفيذ المشروع.

هـ) تقدير احتمال الانتهاء من تنفيذ المشروع بعد الفترة المحددة لتنفيذه بثلاثة أيام.

٦ - سنفترض أن لدينا البيانات الآتية عن أحد المشروعات:

رمز النشاط	النشاط السابق مباشرة	الأوقات المتوقعة لتنقيذ النشاط (باليوم)		تكلفة تنفيذ أنشطة المشروع	
		في الخطة العادية	في الخطة التعجيلية	في الخطة العادية	في الخطة التعجيلية
A	—	1	1	100	100
B	A	3	2	400	650
C	A	7	4	600	975
D	B	2	1	150	300
E	B	1	1	120	120
F	D,E	2	2	300	300
G	D	3	2	300	500
H	C,F,G	7	4	800	1250

والمطلوب :

أ) رسم شبكة أعمال المشروع وتحديد LF وES لكل حدث وإعداد جدول لحساب LF وEF وLS وES لكل نشاط وتحديد فائض كل نشاط والمسار الحرج طبقاً للأوقات العادية .

ب) إيجاد الخطط البديلة لتخفيض فترة تنفيذ المشروع بأقل تكلفة ممكنة .

المـراجـــع

Anderson, D.R., Sweeney, D.J. and **Williams, T.A.** (1979). *"An Introduction to Management Science."* St. Paul: West Publishing Company.

Anderson, M. (1982). *"Quantitative Management Decision Making with Models and Applications."* California: Brooks/Cole Publishing Company.

Buffa, E. and **James, S**. (1977). "Management Science/Operations Research": *"Model Formulation and Solution Methods."* Santa Barbara, Calif: John Wiley and Sons Inc.

Cooper, L. and **Steinberg, D**. (1974). *"Methods and Applications of Linear Programming."* Philadelphia: W.B.Saunders Company.

Dantzig, G.B. (1963). *"Linear Programming and Extensions."* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Davis, R. and **Mckeown, P.** (1981). *"Quantitative Models for Management."* Boston, Massach: Kent Publishing Company.

Eppen, G.D. and **Gould, F.J.** (1979). *"Quantitative Concepts for Management."* N.J.:Englewood Cliffs, Prentice Hall.

Evarts, H.E. (1964). *"Introduction to PERT"*. Boston: Allyn and Bacom.

Gass, S. (1975). *"Linear Programming Methods and Applications,"* 4*th* ed. NewYork: McGraw Hill Book Company.

Hadley, G. (1962). *"Linear Programming."* Reading Mass: Addison-Wesley Publihsing Co. Inc.

Hein, L. (1963). *"The Quantitative Approach to Management Decisions."* N.J.: Prentice Hall Inc. Engliwood Cliffs.

Hillier, F.S. and **Lieberman**. (1974). *"Introduction to Operations Research,"* 2*nd* ed. San Fransisco: Holden-Day Inc.

Ignizio, J. and **Gupta, J**. (1975). *"Operations Research in Decision Making"*. New York, Crane, Russak & Company, Inc.

Lapin, L. (1975). *"Quantitative Methods for Business Decisions."* New York: Harcourt Brace Jovunovich Inc.

Lee, S.M. and **Laurence, J.** (1975). *"Introduction to Decision Science."* New York: Petrocelli/Charter Publishers.

Levin, R.I. and **Kirkpatrick, C.A**. (1966). *"Planning and Control with PERT/CPM."* New York: McGrawHill Book Co.

Lockyer, K.G. (1964). *"An Introduction to Critical Path Analysis."* New York: Pitman.

Lomba, N.P. (1976). *"Linear Programming: A Managerial Perspective,"* *2nd* ed. New York: MacMillan Company.

Luce, R.D. and **Raiffa, H.** (1957). *"Games and Decisions"*. New York: John Wiley & Sons.

Moder, J.J. and **Philips, C.R.** (1970). *"Project Management with CPM and PERT,"* *2nd* ed. New York: D. Van Nostrand.

Naylor, T.H., Byrne, E.T. and **Vernon, J.M.** (1971). *"Introduction to Linear Programming: Methods and Cases."* Belmont Ca: Wadsworth Publishing Co.

Spivey, W. and **Thrall, M**. (1970). *"Linear Optimization."* New York: Holt, Rineherdt and Winston.

Swanson, L.W. (1980). *"Linear Programming: Basic Theory and Applications"*. New York: McGraw-Hill Book Company.

Taha, H. (1976). *"Operations Research."* New York: MacMillan Publishing Company Inc.

Trueman, R. (1981). *"Quantitative Methods for Decision Making in Business."* New York: Holt, Rinehart, Winston.

Vajda, S. (1969). *"Theorie des Jeux et Programmation Lineaire"*. Paris: Dunod.

Wagner, H.M. (1975). *"Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions."* N.J.: Englewood Cliffs Prentice Hall Inc.

Weist, J.D. and **Levy, F.K**. (1969). *"A Management Guide to PERT/CPM."* N.J.:Englewood Cliffs, Prentice Hall Inc.

كشاف المصطلحات

عربى - إنجليزى
إنجليزى - عربى

أولا : عـــربى - إنجليزى

أ





ز

س

ش

ص

ط

ع

غ

ف

ق

م

ن

و

ثانيا : إنجليزى ـ عـــربى

A

B

C

D

H

I

J

L

R

S



U





كشـــاف الموضوعـــات

م

ن

و



ردمك : ٠-٧٥-٠٥-٩٩٦٠
ISBN:9960-05-075-0